Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

Es sei die Quadrik $\mathcal{Q}$ definiert durch

$$\mathcal{Q} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 9\,x_1^2 + 6\,x_2^2 - 4\,x_1 x_2 + 6\sqrt{5}\,x_1 - 8\sqrt{5}\,x_2 - 10 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem diese angenommen wird.

Die Gleichung für $\mathcal{Q}$ ist gegeben durch $x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad a := \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} \\ -4\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad c := -10$$

Das charakteristische Polynom von A lautet $(9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50$ und besitzt die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4} - 50} = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{15}{2} \pm \frac{5}{2}, \quad \text{also } \lambda_1 = 10 \text{ und } \lambda_2 = 5.$$

Einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 10$ von A erhalten wir durch Lösen des LGS

$$\left[\begin{array}{cc||c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

und finden damit zum Beispiel $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Genauso bekommen wir einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 5$ von A, etwa $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wir normieren nun diese Eigenvektoren und betrachten das neue Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = (0; v_1, v_2) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Bezüglich $\mathbb{F}$ ist die Quadrik gegeben durch die Gleichung

$$0 = y^\intercal \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} y + 2 \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix}^\intercal y - 10 = 10y_1^2 + 5y_2^2 - 20y_1 - 10y_2 - 10.$$

Wir substituieren nun passend, um die linearen Terme verschwinden zu lassen:

$$10y_1^2 - 20y_1 = 10(\underbrace{y_1 - 1}_{=:z_1})^2 - 10 \quad \text{und} \quad 5y_2^2 - 10y_2 = 5(\underbrace{y_2 - 1}_{=:z_2})^2 - 5.$$

Also gilt für den neuen Ursprung P

$$ {}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad P = {}_{\mathbb{E}}P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}. $$

Wir erhalten damit das neue Koordinatensystem

$$ \mathbb{G} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) $$

und bezüglich dieses Systems ist die Quadrik gegeben durch die Gleichung

$$ 0 = z^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} z - 25 = 10z_1^2 + 5z_2^2 - 25. $$

Zuletzt teilen wir noch durch -25, um die gesuchte euklidische Normalform zu erhalten

$$ 0 = z^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} z + 1 = -\frac{2}{5} z_1^2 - \frac{1}{5} z_2^2 + 1. $$

Aufgabe 2 (*10 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{7}} 2\,x\,\mathrm{e}^{(x^2)}\;\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{-3x^2-8x+14}{(x+2)(x-1)^2}\;\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int \sin(4x)(x^2+3)\;\mathrm{d}\,x$

(a) Substitution mit $u = x^2$ liefert $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = 2x$ und damit:

$$\int_0^{\sqrt{7}} 2\,x\,\mathrm{e}^{(x^2)}\;\mathrm{d}\,x = \int_0^7 \mathrm{e}^u\;\mathrm{d}\,u = [\mathrm{e}^u]_0^7 = \mathrm{e}^7 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^7 - 1.$$

(b) Die Partialbruchzerlegung liefert

$$\begin{aligned}
\int \frac{-3x^2-8x+14}{(x+2)(x-1)^2}\;\mathrm{d}\,x &\overset{!}{=} \int \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}\;\mathrm{d}\,x\\
\iff -3x^2-8x+14 &\overset{!}{=} Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 + Bx - 2B + Cx + 2C\\
\iff -3x^2-8x+14 &\overset{!}{=} (A+B)x^2 + (-2A+B+C)x + A - 2B + 2C\\
&\implies A = 2, \quad B = -5, \quad C = 1.
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\int \frac{-3x^2-8x+14}{(x+2)(x-1)^2}\;\mathrm{d}\,x = \int \frac{2}{x+2} + \frac{-5}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\;\mathrm{d}\,x$$

Ausführen der Integration ergibt

$$\int \frac{2}{x+2} + \frac{-5}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\;\mathrm{d}\,x = \left[2\ln(|x+2|) - 5\ln(|x-1|) - \frac{1}{x-1}\right]$$

(c) Zweimalige partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned}
\int \sin(4x)(x^2+3)\;\mathrm{d}\,x &= \left[-\cos(4x)\frac{1}{4}(x^2+3)\right] - \int -\cos(4x)\frac{1}{4}2x\;\mathrm{d}\,x\\
&= \left[-\frac{1}{4}\cos(4x)(x^2+3)\right] + \frac{1}{2}\int \cos(4x)x\;\mathrm{d}\,x\\
&= \left[-\frac{1}{4}\cos(4x)(x^2+3) + \frac{1}{2}\sin(4x)\frac{1}{4}x\right] - \frac{1}{2}\int \sin(4x)\frac{1}{4}\;\mathrm{d}\,x\\
&= \left[-\frac{1}{4}\cos(4x)(x^2+3) + \frac{1}{8}\sin(4x)x\right] - \frac{1}{8}\int \sin(4x)\;\mathrm{d}\,x\\
&= \left[-\frac{1}{4}\cos(4x)(x^2+3) + \frac{1}{8}\sin(4x)x + \frac{1}{32}\cos(4x)\right]\\
&= \left[-\frac{1}{4}\cos(4x)(x^2+\frac{23}{8}) + \frac{1}{8}\sin(4x)x\right]
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$A^n = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 2n+3 & 4n \\ -n & 3-2n \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie A^3.

(a) **IA** Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: Es gilt

$$3^{1-1} \begin{pmatrix} 2\cdot 1+3 & 4\cdot 1 \\ -1 & 3-2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A^1.$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n \cdot A \overset{\text{IH}}{=} 3^{n-1} \begin{pmatrix} 2n+3 & 4n \\ -n & 3-2n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 3^{n-1} \begin{pmatrix} 10n+15-4n & 8n+12+4n \\ -5n-3+2n & -4n+3-2n \end{pmatrix} \\
&= 3^{n-1} \begin{pmatrix} 6n+15 & 12n+12 \\ -3n-3 & -6n+3 \end{pmatrix} \\
&= 3^{n-1} \cdot 3 \begin{pmatrix} 2n+5 & 4n+4 \\ -n-1 & -2n+1 \end{pmatrix} \\
&= 3^{(n+1)-1} \begin{pmatrix} 2(n+1)+3 & 4(n+1) \\ -(n+1) & 3-2(n+1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Somit gilt die Aussage für $n+1$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Nach Aufgabenteil (a) ist

$$A^3 = 3^{3-1} \begin{pmatrix} 2\cdot 3+3 & 4\cdot 3 \\ -3 & 3-2\cdot 3 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 108 \\ -27 & -27 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Sandwichsatzes den Grenzwert der Folge $\left(\sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n + 5^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{x-1}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 4^x}{\sin(\pi x)}$

(a) Es gelten

$$\sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n + 5^n} \geqq \sqrt[n]{5^n} = 5 \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n + 5^n} \leqq \sqrt[n]{4 \cdot 5^n} = \sqrt[n]{4} \cdot 5 \to 5$$

für $n \to \infty$. Daher gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n + 5^n} = 5$.

(b) (i) Wir können l'Hospital anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{x-1} &\overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{3}x^{-2/3} - \frac{1}{4}x^{-3/4} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

(ii) Wir können l'Hospital anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 4^x}{\sin(\pi x)} &\overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{4x^3 - \ln(4)4^x}{\pi\cos(\pi x)} \\ &= \frac{1}{\pi}(32 - \ln(4)16) = \frac{32}{\pi}(1 - \ln(2)).\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, indem Sie jeweils eine geeignete Minorante oder Majorante finden.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3n^3 + 33n}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5 + (-1)^n \cdot 7)^n}{n!}$

(a) Die Wurzelfunktion ist monoton und es gilt $33n \leqq 33n^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher folgt

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3n^3 + 33n}} \geqq \frac{1}{\sqrt[3]{3n^3 + 33n^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{36n^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{36}} \frac{1}{n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Somit bildet die skalierte harmonische Reihe $\frac{1}{\sqrt[3]{36}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ eine Minorante von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3n^3+33n}}$. Wir wissen, dass erstere divergiert und nach dem Minorantenkriterium divergiert daher auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3n^3+33n}}$.

(b) Es gilt

$$\left| \frac{(-5 + (-1)^n \cdot 7)^n}{n!} \right| = \frac{|-5 + (-1)^n \cdot 7|^n}{n!} \leqq \frac{12^n}{n!} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Somit bildet die Exponentialreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12^n}{n!} = \mathrm{e}^{12} - 1$ eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5+(-1)^n \cdot 7)^n}{n!}$.

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert somit auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5+(-1)^n \cdot 7)^n}{n!}$.

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}-2\right)^n}{n^2}$ konvergiert.

Die Potenzreihe lässt sich schreiben als

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-4)^n \quad \text{mit} \quad a_n := \begin{cases} 0 & \text{für } n=0 \\ \frac{1}{n^2 \cdot 2^n} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}}{\frac{1}{n^2 2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

ist der Konvergenzradius der Reihe 2.

Die Reihe konvergiert daher schon mal (absolut) auf dem Interval $(2,6)$ und divergiert außerhalb von $[2,6]$.

Wir müssen die Reihe also nur noch untersuchen für $x=2$ und $x=6$.

(a) $x=2$: In diesem Fall ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}-2\right)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ und diese (alternierende) Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, denn $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge.

(b) $x=6$: In diesem Fall ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}-2\right)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und wir wissen bereits, dass diese Reihe konvergent ist.

Insgesamt konvergiert die Reihe also für alle $x \in [2,6]$.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x = \binom{x_1}{x_2} \mapsto 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2 - 10x_1 - 38x_2$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f.

$$\nabla f(x) = \boxed{\begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 - 10 \\ 2x_1 + 12x_2 - 38 \end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad Hf(x) = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}} .$$

(b) Die Funktion f hat eine einzige kritische Stelle x. Bestimmen Sie diese und entscheiden Sie, ob ein lokales Minimum, lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

Bei der Stelle $x = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$ handelt es sich um ein $\boxed{\text{lokales Minimum}}$.

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Wir definieren $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ als die lineare Abbildung, welche

$$\alpha(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha(v_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{erfüllt für} \quad v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie den zweiten und den dritten Standardbasisvektor in $\mathbb{R}^3$ jeweils als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2 und v_3 dar.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \boxed{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \boxed{\left(\frac{-1}{2}\right)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Matrixbeschreibung der Abbildung α bezüglich der Standardbasis E des $\mathbb{R}^3$.

$${}_E\alpha_E = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}} .$$

Aufgabe 9 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\, x^2$.

(a) Geben Sie die folgenden Ableitungen an.

$f'(x) = \boxed{2\mathrm{e}^{2x}(x^2 + x)}$ $f''(x) = \boxed{2\mathrm{e}^{2x}(2x^2 + 4x + 1)}$

(b) Geben Sie ein Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ an, das $x_0 = 1$ im Innern enthält und in dem f streng monoton und differenzierbar ist. Geben Sie die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} von f an der Stelle $y = f(x_0)$ an.

$[a, b] = \boxed{\left[\frac{1}{2}, 10\right]}$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} f^{-1}(y)\Big|_{y=f(x_0)} = \boxed{\frac{1}{4\mathrm{e}^2}}$

(c) Geben Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an.

$T_2(f, x, 1) = \boxed{\mathrm{e}^2 + 4\mathrm{e}^2(x - 1) + 7\mathrm{e}^2(x - 1)^2}$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Kurve K mit Parametrisierung

$$C\colon\ [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Ableitung von C, den Betrag dieser Ableitung und die Länge der Kurve K.

$C'(t) = \boxed{\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} (\cos(t) - \sin(t)) \\ (\sin(t) + \cos(t)) \end{pmatrix}}$ $|C'(t)| = \boxed{\mathrm{e}^t \sqrt{2}}$ $L(K) = \boxed{\sqrt{2}\,(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)}$

Aufgabe 11 (*2 Punkte*)

Zeichnen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung $w^4 = -16$ in die Gaußsche Zahlenebene ein.