Aufgabe 1 (*7 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik
$\mathcal{Q}_1 = \{x = (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,:\, -4x_1x_2 + 14 = 0\}$.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik
$\mathcal{Q}_2 = \left\{(x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,:\, 4x_1^2 + x_2 - 3x_1 + \frac{25}{16} = 0\right\}$.

(a) Zunächst stellen wir fest, dass wir $-4x_1x_2 + 14 = 0$ schreiben können als

$$x^\intercal \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} x + 14 = 0.$$

Die Eigenwerte der Matrix A ergeben sich als die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A(\lambda) = \det\left(A - \lambda E_2\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4,$$

also $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$.

Da die Matrix A symmetrisch ist, gibt es eine Orthonormalbasis $B\colon b_1, b_2$ von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A. Da die Quadrikgleichung keinen linearen Anteil besitzt, hat die Quadrikgleichung bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\mathbb{F} = (0; b_1, b_2)$ die Form

$$2y_1^2 - 2y_2^2 + 14 = 0.$$

(Man beachte, dass das Koordinatensystem in diesem Fall nicht explizit bestimmt werden muss.)
Es ergibt sich die euklidische Normalform

$$\frac{1}{7}y_1^2 - \frac{1}{7}y_2^2 + 1 = 0.$$

(b) Die Quadrikgleichung enthält keine gemischtquadratischen Terme. Daher entfällt der Diagonalisierungsschritt. Wir führen zunächst eine quadratische Ergänzung durch und erhalten

$$\begin{aligned}
& 4x_1^2 + x_2 - 3x_1 + \frac{25}{16} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 4\left(x_1^2 - \frac{3}{4}x_1 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2\right) + x_2 + \frac{25}{16} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 4\left(x_1 - \frac{3}{8}\right)^2 + x_2 - \frac{9}{16} + \frac{25}{16} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 4\left(x_1 - \frac{3}{8}\right)^2 + x_2 + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Nach Einführung der neuen Koordinaten $z_1 = x_1 - \frac{3}{8}$ und $z_2 = x_2 + 1$ ergibt sich

$$4z_1^2 + z_2 = 0.$$

Die euklidische Normalform für diese (parabolische) Quadrik erhalten wir durch Multiplikation der Gleichung mit dem Faktor 2:

$$8z_1^2 + 2z_2 = 0.$$

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{\ln(k)}{\ln(k^2)}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k!}}$

(a) Wegen $\frac{\ln(k)}{\ln(k^2)} = \frac{\ln(k)}{2\ln(k)} = \frac{1}{2}$, bildet die Folge der Reihenglieder keine Nullfolge, weshalb die Reihe divergiert.

(b) Wir wenden das Quotientenkriterium an mit $a_k = \frac{1}{\sqrt{k!}}$ und erhalten

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\sqrt{k!}}{\sqrt{(k+1)!}} = \sqrt{\frac{k!}{(k+1)!}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

Damit konvergiert die Reihe.

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 3^n + n^3 2^n}$.

Es ist

$$\sqrt[n]{n^2 3^n} \leqq \sqrt[n]{n^2 3^n + n^3 2^n} \leqq \sqrt[n]{2n^3 3^n}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 3^n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3, \\
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^3 3^n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \cdot 3 = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3,
\end{aligned}$$

womit sich nach dem Sandwichsatz ergibt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 3^n + n^3 2^n} = 3.$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben sei die reelle Zahl $r \in (0, +\infty)$. Zeigen Sie induktiv:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad \sum_{k=1}^{n} \ln(rk) = \ln\left(n! \cdot r^n\right)$$

IA $n = 1$: Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} \ln(rk) = \ln(r) = \ln\left(1! \cdot r^1\right)$$

IH Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(rk) = \ln\left(n! \cdot r^n\right)$$

IS $n \to n+1$: Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \ln(rk) &= \sum_{k=1}^{n} \ln(rk) + \ln(r(n+1)) = \\ &\overset{\text{IH}}{=} \ln\left(n! \cdot r^n\right) + \ln(r(n+1)) \\ &= \ln\left(\ (n! \cdot r^n) \cdot (r(n+1))\ \right) = \ln\left((n+1)! \cdot r^{n+1}\right)\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Zum Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$\varphi_\gamma \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} \gamma \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times v$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A := {}_E(\varphi_\gamma)_E$ von φ_γ bezüglich der Standardbasis E.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}(\varphi_\gamma)$.

(a) Es gelten:

$$\varphi(\mathrm{e}_1) = \begin{pmatrix} \gamma \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\varphi(\mathrm{e}_2) = \begin{pmatrix} \gamma \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$$
$$\varphi(\mathrm{e}_3) = \begin{pmatrix} \gamma \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$

Folglich gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -\gamma \\ -4 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Wir nutzen Gauß:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -\gamma & 0 \\ -4 & \gamma & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 \leftrightarrow Z_2 : \\ Z_2 \leftrightarrow Z_1 : \\ Z_3 + 2Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & \gamma & -2\gamma & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} 1/2 \cdot Z_1 : \\ -1/2 \cdot Z_2 : \\ 2Z_3 + \gamma Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & -\gamma/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Wir erhalten:

$$\operatorname{Kern}(\varphi_\gamma) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Alternativer Lösungsweg:

Gemäß den Eigenschaften des Vektorprodukts gilt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi_\gamma(v) = \begin{pmatrix} \gamma \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times v$$

genau dann, wenn $\begin{pmatrix} \gamma \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und v linear abhängig sind. Hieraus folgt sofort:

$$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} \gamma \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Kern}(\varphi_\gamma)$$

Aufgabe 6 (*14 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto x^4 - 4y + 8\,,$$
$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto x^4 + \frac{1}{4}y^4 - y^3\,.$$

Wir suchen die relativen Extrema von f auf der kompakten Menge $D := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; g\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = 0 \right\}$.

(a) Bestimmen Sie die $\nabla f\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)$ und $\nabla g\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)$.

(b) Stellen Sie das Lagrange-System zu $f|_D$ auf.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von $f|_D$, also die Lösungen des in (b) aufgestellten Systems. Geben Sie jeweils die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren an.

(d) Bestimmen Sie den minimalen sowie den maximalen Wert von f auf D.

(a) Es gelten:

$$\nabla f\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} 4x^3 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\nabla g\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} 4x^3 \\ y^3 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

(b) Das Lagrange-System lautet:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & 4x^3 + \lambda \cdot 4x^3 & = & 0 \\ \text{(II)} & -4 + \lambda \cdot y^2(y-3) & = & 0 \\ \text{(III)} & x^4 + \frac{1}{4}y^4 - y^3 & = & 0 \end{array}$$

(c) Wir lösen das System aus (b). Aus der ersten Gleichung folgt $x = 0$ oder $\lambda = -1$.

$x = 0$: Aus (III) wird

$$0 = \frac{1}{4}y^4 - y^3 = y^3\left(\frac{1}{4}y - 1\right)$$

Hieraus ergeben sich die Möglichkeiten $y = 0$ und $y = 4$. Allerdings widerspricht $y = 0$ der Gleichung (II): $-4 \neq 0$.

Für $y = 4$ ergibt sich

$$0 = -4 + 16\lambda \qquad \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$$

Wir erhalten die kritische Stelle

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit zugehörigem Lagrange-Multiplikator $\lambda = \frac{1}{4}$.

$\lambda = -1$: Aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$y^3 - 3y^2 + 4 = 0$$

Eine Nullstelle finden wir durch Raten: $y = -1$.

Polynomdivision liefert nun:

$$\begin{array}{l}
\Big(\quad y^3 - 3y^2 \qquad + 4 \Big) : \Big(y + 1 \Big) = y^2 - 4y + 4 \\
\underline{- y^3 \quad - y^2} \\
\qquad - 4y^2 \\
\qquad \underline{\ \ 4y^2 \ + 4y} \\
\qquad\qquad\quad 4y \ + 4 \\
\qquad\qquad \underline{- 4y \ - 4} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Wegen $y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2$ sind die Nullstellen $y_1 = -1, y_{2/3} = 2$.

Alternativer Lösungsweg zur Nullstellenbestimmung:

Eine Nullstelle finden wir durch Raten: $y_1 = 2$.

Polynomdivision liefert nun:

$$\begin{array}{l}
\Big(\quad y^3 - 3y^2 \qquad + 4 \Big) : \Big(y - 2 \Big) = y^2 - y - 2 \\
\underline{- y^3 \ + 2y^2} \\
\qquad - y^2 \\
\qquad \underline{\ \ y^2 \ - 2y} \\
\qquad\qquad - 2y \ + 4 \\
\qquad\qquad \underline{\ \ 2y \ - 4} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Mittels der allgemeinen Lösungsformel erhalten wir hieraus die Nullstellen

$$\begin{aligned} y_2 &= \tfrac{1-\sqrt{1+8}}{2} = -1 \\ y_3 &= \tfrac{1+3}{2} = 2 \end{aligned}$$

Einsetzen in (III) ergibt für $y = -1$ die unlösbare Gleichung $x^4 + \frac{5}{4} = 0$. Für $y = 2$ erhalten wir

$$x^4 - 4 = 0$$

und somit $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$. Die kritischen Stellen lauten folglich

$$S_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \qquad , \qquad S_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

jeweils mit Lagrange-Multiplikator $\lambda = -1$.

(d) Wir prüfen zunächst, ob es Stellen in D mit $\nabla g\left(\binom{x}{y}\right) = \binom{0}{0}$ gibt:
Aus der ersten Komponente folgt $x = 0$, aus der zweiten

$$y^2(y-3) = 0$$

und somit $y = 0$ oder $y = 3$. Einsetzen beider Werte sowie $x = 0$ in g ergibt:

$y = 0$: $x^4 + \frac{1}{4}y^4 - y^3 = 0$.

$y = 3$: $x^4 + \frac{1}{4}y^4 - y^3 = \left(\frac{3}{4} - 1\right) \cdot 27 < 0$

Folglich gilt $\nabla g\left(\binom{x}{y}\right) = \binom{0}{0}$ bei Einschränkung auf die Menge D nur für $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$.
Da D kompakt und f stetig ist, werden Minimum und Maximum in einer kritischen Stelle oder in $\binom{0}{0}$ angenommen, wir müssen nur die Werte vergleichen:

$$\begin{aligned}
f\left(\binom{0}{0}\right) &= 0^4 - 4 \cdot 0 + 8 &&= 8 \\
f(S_1) &= 0^4 - 4 \cdot 4 + 8 &&= -8 \\
f(S_2) &= \underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^4}_{=4} -8 + 8 &&= 4 \quad = f(S_3)
\end{aligned}$$

Somit gelten:

$$\begin{aligned}
\min_{\binom{x}{y} \in D} f\left(\binom{x}{y}\right) &= -8 \\
\max_{\binom{x}{y} \in D} f\left(\binom{x}{y}\right) &= 8
\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:

Wir lösen g nach x^4 auf und setzen dies in f ein:

$$x^4 + \frac{1}{4}y^4 - y^3 = 0$$
$$\Rightarrow x^4 = -\frac{1}{4}y^4 + y^3 = y^3\left(1 - \frac{1}{4}y\right)$$

Für $y \in [0,4]$ ist die rechte Seite $\geqq 0$, womit die Gleichung lösbar wird, für $x \notin [0,4]$ existiert keine Lösung wegen $x^4 \geqq 0, y^3\left(1 - \frac{1}{4}y\right) < 0$.
Wir müssen nun nur das Hilfsproblem

$$\min_{y \in [0,4]} \tilde{f}(y)$$

mit $\tilde{f}(y) = -\frac{1}{4}y^4 + y^3 - 4y + 8$ lösen. Ableiten ergibt:

$$\tilde{f}'(y) = -y^3 + 3y^2 - 4$$

Analog zu oben erhalten wir die Nullstellen $y_1 = -1 \notin [0,4]$ und $y_{2/3} = 2 \in [0,4]$.
Einsetzen der kritischen Stellen sowie der Randwerte liefert nun

$$\tilde{f}(2) = 4$$
$$\tilde{f}(0) = 8$$
$$\tilde{f}(4) = -8$$

und somit

$$\begin{aligned}
\min_{\binom{x}{y}\in D} f\left(\binom{x}{y}\right) &= -8 \\
\max_{\binom{x}{y}\in D} f\left(\binom{x}{y}\right) &= 8
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Berechnen Sie das folgende Integral: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x}{\mathrm{e}^{(x^2+4)}} \,\mathrm{d}\,x$

Die Substitution $u = x^2 + 4$ liefert:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{2x}{\mathrm{e}^{(x^2+4)}} \,\mathrm{d}\,x &= \int_4^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^u} \,\mathrm{d}\,x \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{\mathrm{e}^u}\right]_4^b \\
&= \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{\mathrm{e}^b} + \frac{1}{\mathrm{e}^4} = \frac{1}{\mathrm{e}^4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben sei das konservative Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x)y + 1 \\ \sin(x) \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie eine Potentialfunktion.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f\left(\binom{x}{y}\right)$.

(a) Für ein Potential u von f muss gelten $\nabla u = f$. Daher ist insbesondere

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} u\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \cos(x)y + 1 \\ \Leftrightarrow \quad & u\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \int (\cos(x)y + 1)\,\mathrm{d}x = \sin(x)y + x + c(y). \end{aligned}$$

Differentiation nach y und Abgleich liefert

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} u\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \sin(x) + c'(y) \stackrel{!}{=} \sin(x) \\ \Leftrightarrow \quad & c'(y) = 0, \end{aligned}$$

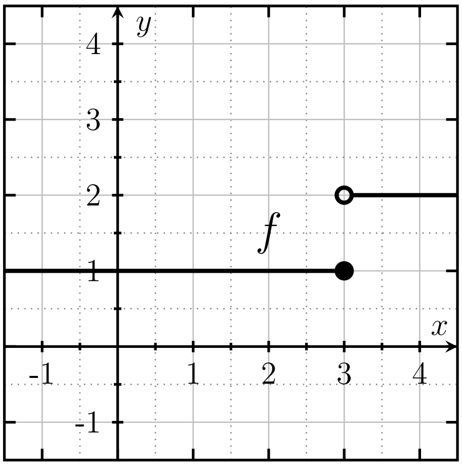
sodass eine Potentialfunktion gegeben ist durch

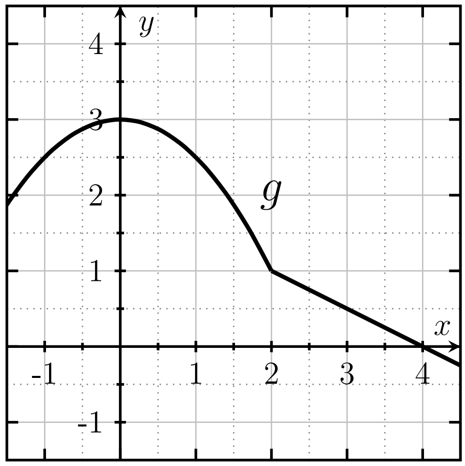
$$u\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \sin(x)y + x.$$

(b) Da f ein konservatives Vektorfeld und beliebig oft differenzierbar ist, gilt notwendigerweise $\operatorname{rot} f = 0$.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) In den nachfolgenden Abbildungen sind Ausschnitte der Graphen der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} 1 & x \leqq 3 \\ 2 & x > 3 \end{cases}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 3 & x \leqq 2 \\ -\frac{1}{2}x + 2 & x > 2 \end{cases}$ dargestellt:





Geben Sie die Stellen an, an denen die Funktionen nicht stetig bzw. nicht differenzierbar sind. Gibt es keine solche Stellen, so notieren Sie „leere Menge“.

	ist unstetig bei	ist nicht differenzierbar bei
f	3	3
g	leere Menge	2

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Gegeben seien die Matrizen A_α, $B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -3 & 2\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimmen Sie α so, dass $\det(A_\alpha) = 8$ gilt: $\alpha = \boxed{4\mathrm{i}}$

(b) Bestimmen Sie $\det(B)$: $\det(B) = \boxed{-24}$

(c) Bestimmen Sie $\det(B^{-1}A_\alpha)$ für das in (a) bestimmte α: $\det\left(B^{-1}A_\alpha\right) = \boxed{-\frac{1}{3}}$

Aufgabe 11 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (\mathrm{e}^x + 1)^4$.

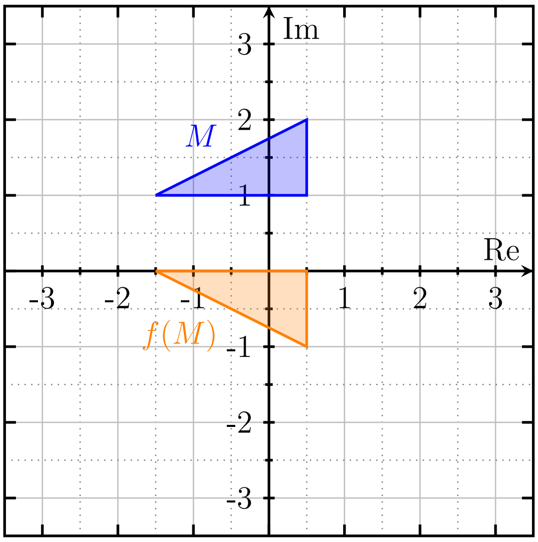
(a) Geben Sie die folgenden Ableitungen an.

$f'(x) = \boxed{4\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)^3}$ $\qquad f''(x) = \boxed{4\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)^3 + 12\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^x+1)^2}$

(b) Geben Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

$T_2(f, x, 0) = \boxed{16 + 32x + 40x^2}$

Aufgabe 12 (*4 Punkte*) Sei M die Menge $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 2 \leqq 2\,\mathrm{Im}(z) \leqq \mathrm{Re}(z) + \frac{7}{2} \text{ und } \mathrm{Re}(z) \leqq \frac{1}{2} \right\}$ und f die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \bar{z} + \mathrm{i}$. Skizzieren Sie M sowie das Bild $f(M)$ in der Gaußschen Zahlenebene:



- Je für ein korrektes Randgeradenstück $y = 1$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$, $x = \frac{1}{2}$.
- FF bei $f(M)$ beachten: M aber an reeller Achse gespiegelt und um eins „nach oben“ verschoben gibt entsprechend <u>noch</u> im FF-Modus.
- Falls **beide** Bezeichnungen (M, $f(M)$) fehlen, einmalig
- Einmalig , falls nicht gekennzeichnet wurde, dass inneres dazugehört. (Schraffur o. ä. genügt)
- Zeichengenauigkeit beachten!

Aufgabe 13 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Welchen Zeilenrang hat $A - 2E_4$? $\boxed{2}$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A, deren algebraische und geometrische Vielfachheit und geben Sie die zugehörigen Eigenräume an.

λ	e_λ	d_λ	$V(\lambda)$
$\lambda_1 = 5$	$e_1 = 1$	$d_1 = 1$	$V(5) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 9 & 9 & 15 & 8 \end{pmatrix}^\intercal\right)$
$\lambda_2 = 2$	$e_2 = 3$	$d_2 = 2$	$V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\intercal, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\intercal\right)$