Im Wintersemester 2017/18 wurde in der Vorlesung „Höhere Mathematik 1 für Ingenieurstudiengänge“ das folgende Beispiel zur Hauptachsentransformation besprochen:

Hauptachsentransformation bei einer Hyperbel

6.3.14 Zusatz-Beispiel. Wir betrachten die Quadrik

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -\frac{41}{13}x_1^2 + \frac{72}{13}x_1x_2 - \frac{11}{13}x_2^2 + 2\,x_2 - \frac{10}{13} = 0 \right\}.$$

Matrixdarstellung: $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -41 & 36 \\ 36 & -11 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = -\frac{10}{13}.$$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} -\frac{41}{13} - \lambda & \frac{36}{13} \\ \frac{36}{13} & -\frac{11}{13} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - 5$, also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -5$.

Eigenvektoren aus $(A - \lambda E_2)v = 0$, oder besser $13\,(A - \lambda E_2)v = 0$:

$$\left[\begin{array}{cc||c} -41 - 13\lambda & 36 & 0 \\ 36 & -11 - 13\lambda & 0 \end{array}\right]$$

$$\lambda_1 = 1: \quad \left[\begin{array}{cc||c} -41 - 13 & 36 & 0 \\ 36 & -11 - 13 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc||c} -54 & 36 & 0 \\ 36 & -24 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{9}\cdot Z_1: \\ \frac{1}{6}\cdot Z_2: \end{array} \left[\begin{array}{cc||c} -6 & 4 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{c|c||c} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

führt auf den Eigenraum $\mathbb{R}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_2 = -5: \quad \left[\begin{array}{cc||c} -41 + 65 & 36 & 0 \\ 36 & -11 + 65 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc||c} 24 & 36 & 0 \\ 36 & 54 & 0 \end{array}\right]$$

führt auf den Eigenraum $\mathbb{R}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wir benutzen die Orthonormalbasis $f_1 := \frac{1}{\sqrt{13}}\binom{2}{3}$, $f_2 := \frac{1}{\sqrt{13}}\binom{-3}{2}$, das neue Koordinatensystem $\mathbb{F} = (0; f_1, f_2)$ und $F := (f_1\, f_2) = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Es gilt $\tilde{A} = F^\top A\, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ und $\tilde{a} = F^\top a = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Mit $x = {}_{\mathbb{E}}X$ und $y = {}_{\mathbb{F}}X$ gilt also $x = Fy$, und wir erhalten die neue Gleichung $y^\top F^\top A\, F\, y + 2(F^\top a)^\top y + c = 0$, also

$$y_1^2 - 5\,y_2^2 + 2\frac{3}{\sqrt{13}}\,y_1 + 2\,\frac{2}{\sqrt{13}}\,y_2 - \frac{10}{13} = 0\,.$$

Quadratische Ergänzung führt auf

$$\left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 - \frac{9}{13} \qquad - 5\left(y_2 - \frac{2}{5\sqrt{13}}\right)^2 + 5\frac{4}{25\cdot 13} \qquad - \frac{10}{13} \quad = \quad 0\,.$$

Die neue Konstante ist also $\tilde{c} = -\frac{9}{13} + 5\frac{4}{25\cdot 13} - \frac{10}{13} = \frac{-45+4-50}{5\cdot 13} = -\frac{91}{5\cdot 13} = -\frac{7\cdot 13}{5\cdot 13} = -\frac{7}{5}$, und $z = y + \frac{1}{5\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 15 \\ -2 \end{pmatrix}$ führt auf die neue Gleichung

$$z_1^2 - 5\,z_2^2 - \frac{7}{5} = 0\,.$$

Unsere Quadrik H ist also eine *Hyperbel*; die euklidische Normalform ist

$$-\frac{5}{7}\,z_1^2 + \frac{25}{7}\,z_2^2 + 1 = 0\,.$$

Das letzte Koordinatensystem $\mathbb{G}$, in dem diese Gleichung die Quadrik beschreibt, entsteht aus $\mathbb{F}$ durch Verschieben des Ursprungs: Der neue Ursprung P erfüllt ${}_{\mathbb{G}}P = \binom{0}{0}$. Wegen $y = {}_{\mathbb{F}}X \iff {}_{\mathbb{G}}X = z = y + \frac{1}{5\sqrt{13}}\binom{15}{-2}$ liefert dies ${}_{\mathbb{F}}P = \frac{1}{5\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -15 \\ 2 \end{pmatrix}$ und damit ${}_{\mathbb{E}}P = F\,{}_{\mathbb{F}}P = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{5\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -15 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5\cdot 13}\begin{pmatrix} -36 \\ -41 \end{pmatrix} = \frac{1}{65}\begin{pmatrix} -36 \\ -41 \end{pmatrix}$, also

$$\mathbb{G} = (P; f_1, f_2) \;= \left(\frac{1}{65}\begin{pmatrix} -36 \\ -41 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Um die Quadrik bequem zu skizzieren, zeichnen wir zuerst die beiden neuen Koordinatensysteme $\mathbb{F}$ bzw. $\mathbb{G}$, dann die Asymptoten ($z_1^2 - 5z_2^2 = 0$), die Punkte mit $z_2 = 0$ (also $z_1 = \pm\sqrt{7/5}$) und schließlich die Hyperbel: