Im Wintersemester 2013/14 wurde in der Vorlesung „Höhere Mathematik 1 für Ingenieurstudiengänge“ die folgende Hilfe zum Erkennen von Konvergenz oder Divergenz bei Folgen eingefügt:

1.4.11 Beispiele. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

1. Wenn die Folge konvergiert, dann konvergiert auch jede Teilfolge.

2. Eine reelle Zahl a ist genau dann Häufungspunkt der Folge, wenn es eine gegen a konvergente Teilfolge gibt.

3. Die Folge häuft sich bei $+\infty$ oder $-\infty$ genau dann, wenn es eine entsprechende bestimmt divergente Teilfolge gibt.

4. Die Folge konvergiert *genau dann*, wenn sie nur einen einzigen Häufungspunkt hat *und* dieser *reell* ist. In diesem Fall gilt $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, dieser Wert ist reell, und er stimmt mit dem Grenzwert überein.

5. Die Folge ist *genau dann* bestimmt divergent, wenn sie nur einen einzigen Häufungspunkt hat *und* dieser *nicht reell* ist. (Dieser Häufungspunkt ist also $-\infty$ oder $+\infty$). In diesem Fall gilt wieder $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, aber dieser Wert liegt jetzt in $\{-\infty, +\infty\}$.

1.4.12 Beispiele. Eine divergente Folge *kann* konvergente Teilfolgen haben.

1. $a_n = n$ liefert eine bestimmt divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
(diese strebt gegen $+\infty$, keine Teilfolge konvergiert).

2. $b_n = (-1)^n n$ liefert eine divergente Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
Es gilt $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n = +\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n = -\infty$, keine Teilfolge konvergiert.

3. $c_n = 1 + (-1)^n$ liefert eine divergente Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
Es gilt $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, c_n = 2$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, c_n = 0$, konvergente Teilfolgen sind z. B. $(c_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(c_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, mit $\lim\limits_{k\to\infty} c_{2k} = 2$ und $\lim\limits_{k\to\infty} c_{2k+1} = 0$.

4. $d_n = (1 - (-1)^n)n$ liefert eine divergente Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
Es gilt $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, d_n = +\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, d_n = 0$; die Teilfolge $(d_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

1.4.13 Beispiel. Wenn man endlich viele konvergente Teilfolgen einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart gefunden hat, dass jeder Index $n \in \mathbb{N}$ als Index in wenigstens einer dieser Teilfolgen verwendet wird, dann ist die Menge aller Häufungspunkte der Folge genau die Menge der Grenzwerte dieser Teilfolgen.

1. In der durch $a_n = \frac{1}{n} + \cos(n\frac{\pi}{2})$ gegebenen Folge haben wir die vier Teilfolgen $(a_{4k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{4k-3})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{4k-2})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{4k-1})_{k\in\mathbb{N}}$. Diese konvergieren gegen 1, gegen 0, gegen -1 und gegen 0. Die Menge aller Häufungspunkte der Folge ist $\{-1, 0, 1\}$.
2. Das Verfahren klappt nicht bei allen Folgen. Zum Beispiel hat die Folge $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich viele Häufungspunkte: Jeder Punkt im Intervall $[-1, 1]$ ist Häufungspunkt (aber das ist schwer zu beweisen).