Name: | **Matrikelnr.:** | **Fach:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei handschriftlich beschriebene Seiten DIN A4 Papier.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Gegeben sind die Punkte $P_1 = (1, 2, -1)$, $P_2 = (3, 2, 2)$ und $P_3 = (-1, 3, 2)$. Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene E_1 durch diese 3 Punkte an.

$$E_1 : \boxed{\frac{3x_1 + 12x_2 - 2x_3}{\sqrt{157}} = \frac{29}{\sqrt{157}}}$$

Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Ebene E_1 mit der Geraden g_1 durch $P_4 = (0, 1, 0)$ und $P_5 = (4, 2, 1)$.

$$S = \boxed{\left(\frac{34}{11}, \frac{39}{22}, \frac{17}{22}\right)}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix A sowie die Dimension des Kerns der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto Av$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die Dimensionsformel an: $\boxed{\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathrm{Kern}\,(f)) + \dim(\mathrm{Bild}\,(f))}$

$\mathrm{Rg}(A) = \boxed{2}$ $\qquad \dim(\mathrm{Kern}\,(f)) = \boxed{2}$

Aufgabe 4 (*9 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & -13 & 10 \\ 2 & 7 & t \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}\,.$$

1. Für welche t besitzt $A(t)$ eine Inverse? $\boxed{t \neq -6}$

   Berechnen Sie für diese t die dritte Zeile der Inversen $(A(t))^{-1}$:

   $$\boxed{\frac{1}{t+6}\big(2, 1, 1\big)}$$

2. Wie lautet insbesondere $(A(-7))^{-1}$? $\quad (A(-7))^{-1} = \left(\boxed{\begin{matrix} 21 & 7 & 4 \\ -8 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{matrix}}\right)$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Sei $\vec{v} = (1, 2, -1, 3)$ und $\vec{w} = (3, 0, 2, -1)$.

Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle = \boxed{-2}$

Zerlegen Sie $\vec{w}$ in einen Vektor $\vec{v_0}$ orthogonal zu $\vec{v}$ und einen Vektor $\vec{v_1} \in L(\vec{v})$:

$\vec{v_0} = \boxed{\frac{1}{15}\Big(47, 4, 28, -9\Big)}$ $\vec{v_1} = \boxed{-\frac{2}{15}\Big(1, 2, -1, 3\Big)}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Für welches c ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ c \end{pmatrix} \quad \text{lösbar?}$$

$c = \boxed{8}$.

Wie lautet die allgemeine Lösung für dieses c?

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{-2 + 2\lambda} \\ \boxed{-4 + 4\lambda} \\ \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ und $z_2 = -1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$. Geben Sie die Polarkoordinatendarstellungen von z_1 und z_2 an und berechnen Sie damit die Polarkoordinatendarstellungen von z_1^{10} sowie z_2^4.

Welche Polarkoordinatendarstellung hat die komplexe Zahl $z = \frac{z_1^{10}}{z_2^4}$?

(In allen Fällen soll das Argument zwischen 0 und 2π liegen.)

$z_1 = \boxed{\sqrt{2}\, e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}}$ $z_2 = \boxed{2\, e^{\mathrm{i}\,\frac{4\pi}{3}}}$ $z_1^{10} = \boxed{32\, e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}}$

$z_2^4 = \boxed{16\, e^{\mathrm{i}\,\frac{4\pi}{3}}}$ $z = \boxed{2\, e^{\mathrm{i}\,\frac{7\pi}{6}}}$

(Hier wird die abkürzende Schreibweise $e^{\mathrm{i}\,t} := \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)$ verwendet.)

Aufgabe 8 (*9 Punkte*) In $\mathbb{R}^2$ seien die Standardbasis E: $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ und die Basis B: $b_1 = (1,-1)$, $b_2 = (3,1)$ gegeben. Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die durch

$$\alpha(b_1) = (5,-10) \quad \text{und} \quad \alpha(b_2) = (3,-6)$$

definierte lineare Abbildung.

1. Berechnen Sie die Matrixdarstellungen ${}_B\mathrm{id}_B$, ${}_E\mathrm{id}_B$ und ${}_B\mathrm{id}_E$.

$${}_B\mathrm{id}_B = \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}\right) \qquad {}_E\mathrm{id}_B = \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{matrix}}\right) \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \left(\boxed{\begin{matrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{matrix}}\right)$$

2. Berechnen Sie die Matrixdarstellungen ${}_E\alpha_B$, ${}_E\alpha_E$ und ${}_B\alpha_E$.

$${}_E\alpha_B = \left(\boxed{\begin{matrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{matrix}}\right) \qquad {}_E\alpha_E = \left(\boxed{\begin{matrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{matrix}}\right) \qquad {}_B\alpha_E = \left(\boxed{\begin{matrix} \frac{7}{2} & -\frac{21}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{matrix}}\right)$$

Name: | **Matrikelnr.:** | **Fach:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei handschriftlich beschriebene Seiten DIN A4 Papier.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Gegeben sind die Punkte $P_1 = (2,4,3)$, $P_2 = (-2,1,4)$ und $P_3 = (1,2,3)$. Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene E_1 durch diese 3 Punkte an.

$$E_1: \quad \boxed{\frac{2x_1 - x_2 + 5x_3}{\sqrt{30}} = \frac{15}{\sqrt{30}}}$$

Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Ebene E_1 mit der Geraden durch $P_4 = (1,1,-2)$ und $P_5 = (4,1,2)$.

$$S = \boxed{\frac{1}{13}\Big(49, 13, 22\Big)}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix A sowie die Dimension des Kerns der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto Av$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die Dimensionsformel an: $\boxed{\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathrm{Kern}\,(f)) + \dim(\mathrm{Bild}\,(f))}$

$\mathrm{Rg}(A) = \boxed{3}$ $\qquad \dim(\mathrm{Kern}\,(f)) = \boxed{1}$

Aufgabe 4 (*9 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -8 \\ 3 & -5 & t \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

1. Für welche t besitzt $A(t)$ eine Inverse? $\boxed{t \neq 11}$

   Berechnen Sie für diese t die dritte Zeile der Inversen $(A(t))^{-1}$:

   $\boxed{\frac{1}{t-11}\big(-1, 1, 1\big)}$

2. Wie lautet insbesondere $(A(12))^{-1}$? $\quad (A(12))^{-1} = \left(\boxed{\begin{matrix} 4 & -9 & -7 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}\right)$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Sei $\vec{v} = (-1, 0, 4, 2)$ und $\vec{w} = (-1, -1, 2, 2)$.

Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle = \boxed{13}$

Zerlegen Sie $\vec{w}$ in einen Vektor $\vec{v_0}$ orthogonal zu $\vec{v}$ und einen Vektor $\vec{v_1} \in L(\vec{v})$:

$\vec{v_0} = \boxed{\frac{1}{21}\Big(-8, -21, -10, 16\Big)}$ $\vec{v_1} = \boxed{\frac{13}{21}\Big(-1, 0, 4, 2\Big)}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Für welches c ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix} \quad \text{lösbar?}$$

$c = \boxed{4}$.

Wie lautet die allgemeine Lösung für dieses c? $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{-1+\lambda} \\ \boxed{-2+2\lambda} \\ \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ und $z_2 = -1 + \mathrm{i}$. Geben Sie die Polarkoordinatendarstellungen von z_1 und z_2 an und berechnen Sie damit die Polarkoordinatendarstellungen von z_1^4 sowie z_2^{10}.

Welche Polarkoordinatendarstellung hat die komplexe Zahl $z = \dfrac{z_1^4}{z_2^{10}}$?

(In allen Fällen soll das Argument zwischen 0 und 2π liegen.)

$z_1 = \boxed{2\,e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}}$ $z_2 = \boxed{\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}}}$ $z_1^4 = \boxed{16\,e^{\mathrm{i}\,\frac{4\pi}{3}}}$

$z_2^{10} = \boxed{32\,e^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{2}}}$ $z = \boxed{\frac{1}{2}\,e^{\mathrm{i}\,\frac{11\pi}{6}}}$

(Hier wird die abkürzende Schreibweise $e^{\mathrm{i}\,t} := \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)$ verwendet.)

Aufgabe 8 (*9 Punkte*) In $\mathbb{R}^2$ seien die Standardbasis E: $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ und die Basis B: $b_1 = (1,-3)$, $b_2 = (1,1)$ gegeben. Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die durch

$$\alpha(b_1) = (5,-10) \quad \text{und} \quad \alpha(b_2) = (-3,6)$$

definierte lineare Abbildung.

1. Berechnen Sie die Matrixdarstellungen ${}_B\mathrm{id}_B$, ${}_E\mathrm{id}_B$ und ${}_B\mathrm{id}_E$.

$${}_B\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad {}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

2. Berechnen Sie die Matrixdarstellungen ${}_E\alpha_B$, ${}_E\alpha_E$ und ${}_B\alpha_E$.

$${}_E\alpha_B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 & -3 \\ -10 & 6 \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad {}_E\alpha_E = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad {}_B\alpha_E = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Name: **Matrikelnr.:**   **Fach:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei handschriftlich beschriebene Seiten DIN A4 Papier.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Gegeben sind die Punkte $P_1 = (0,2,-3)$, $P_2 = (-2,4,2)$ und $P_3 = (-1,2,-4)$. Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene E_1 durch diese 3 Punkte an.

$$E_1: \quad \boxed{\frac{2x_1 + 7x_2 - 2x_3}{\sqrt{57}} = \frac{20}{\sqrt{57}}}$$

Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Ebene E_1 mit der Geraden durch $P_4 = (2,0,1)$ und $P_5 = (3,2,-1)$.

$$S = \boxed{\frac{1}{10}\Big(29, 18, -8\Big)}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix A sowie die Dimension des Kerns der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto Av$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die Dimensionsformel an: $\boxed{\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathrm{Kern}\,(f)) + \dim(\mathrm{Bild}\,(f))}$

$\mathrm{Rg}(A) = \boxed{1}$ $\quad \dim(\mathrm{Kern}\,(f)) = \boxed{3}$

Aufgabe 4 (*9 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 7 & -6 \\ -3 & -11 & t \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

1. Für welche t besitzt $A(t)$ eine Inverse? $\boxed{t \neq 8}$

   Berechnen Sie für diese t die dritte Zeile der Inversen $(A(t))^{-1}$:

   $\boxed{\frac{1}{t-8}\big(1, 1, 1\big)}$

2. Wie lautet insbesondere $(A(9))^{-1}$? $\quad (A(9))^{-1} = \left(\boxed{\begin{matrix} 3 & 14 & 10 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}} \right)$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Sei $\vec{v} = (2, 1, -3, 0)$ und $\vec{w} = (2, -3, 1, 1)$.

Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle = \boxed{-2}$

Zerlegen Sie $\vec{w}$ in einen Vektor $\vec{v_0}$ orthogonal zu $\vec{v}$ und einen Vektor $\vec{v_1} \in L(\vec{v})$:

$\vec{v_0} = \boxed{\frac{1}{7}\Big(16, -20, 4, 7\Big)}$ $\quad$ $\vec{v_1} = \boxed{-\frac{1}{7}\Big(2, 1, -3, 0\Big)}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Für welches c ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 6 & -4 & -2 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ c \end{pmatrix} \text{ lösbar?}$$

$c = \boxed{-4}$.

Wie lautet die allgemeine Lösung für dieses c? $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1-\lambda} \\ \boxed{2-2\lambda} \\ \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = -1 - \mathrm{i}$ und $z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$. Geben Sie die Polarkoordinatendarstellungen von z_1 und z_2 an und berechnen Sie damit die Polarkoordinatendarstellungen von z_1^{10} sowie z_2^4.

Welche Polarkoordinatendarstellung hat die komplexe Zahl $z = \dfrac{z_1^{10}}{z_2^4}$?

(In allen Fällen soll das Argument zwischen 0 und 2π liegen.)

$z_1 = \boxed{\sqrt{2}\, e^{\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{4}}}$ $\quad$ $z_2 = \boxed{2\, e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}}$ $\quad$ $z_1^{10} = \boxed{32\, e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}}$

$z_2^4 = \boxed{16\, e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}}}$ $\quad$ $z = \boxed{2\, e^{\mathrm{i}\,\frac{11\pi}{6}}}$

(Hier wird die abkürzende Schreibweise $e^{\mathrm{i}\,t} := \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)$ verwendet.)

Aufgabe 8 (*9 Punkte*) In $\mathbb{R}^2$ seien die Standardbasis E: $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ und die Basis B: $b_1 = (1,2)$, $b_2 = (-1,1)$ gegeben. Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die durch

$$\alpha(b_1) = (5,-10) \quad \text{und} \quad \alpha(b_2) = (-2,4)$$

definierte lineare Abbildung.

1. Berechnen Sie die Matrixdarstellungen ${}_B\mathrm{id}_B$, ${}_E\mathrm{id}_B$ und ${}_B\mathrm{id}_E$.

$${}_B\mathrm{id}_B = \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}\right) \qquad {}_E\mathrm{id}_B = \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix}}\right) \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \left(\boxed{\begin{matrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix}}\right)$$

2. Berechnen Sie die Matrixdarstellungen ${}_E\alpha_B$, ${}_E\alpha_E$ und ${}_B\alpha_E$.

$${}_E\alpha_B = \left(\boxed{\begin{matrix} 5 & -2 \\ -10 & 4 \end{matrix}}\right) \qquad {}_E\alpha_E = \left(\boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{matrix}}\right) \qquad {}_B\alpha_E = \left(\boxed{\begin{matrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ -4 & -\frac{4}{3} \end{matrix}}\right)$$

Name: | **Matrikelnr.:** | **Fach:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei handschriftlich beschriebene Seiten DIN A4 Papier.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Gegeben sind die Punkte $P_1 = (2, 0, -3)$, $P_2 = (1, 5, -1)$ und $P_3 = (3, 2, -3)$. Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene E_1 durch diese 3 Punkte an.

$$E_1: \boxed{\frac{-4x_1 + 2x_2 - 7x_3}{\sqrt{69}} = \frac{13}{\sqrt{69}}}$$

Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Ebene E_1 mit der Geraden durch $P_4 = (3, 0, -3)$ und $P_5 = (1, 2, 1)$.

$$S = \boxed{\frac{1}{2}\Big(7, -1, -8\Big)}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix A sowie die Dimension des Kerns der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto Av$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die Dimensionsformel an: $\boxed{\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathrm{Kern}\,(f)) + \dim(\mathrm{Bild}\,(f))}$

$\mathrm{Rg}(A) = \boxed{2}$ $\qquad \dim(\mathrm{Kern}\,(f)) = \boxed{2}$

Aufgabe 4 (*9 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 12 \\ -2 & 3 & t \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

1. Für welche t besitzt $A(t)$ eine Inverse? $\boxed{t \neq -9}$

   Berechnen Sie für diese t die dritte Zeile der Inversen $(A(t))^{-1}$:

   $\boxed{\frac{1}{t+9}\Big(-1, 1, 1\Big)}$

2. Wie lautet insbesondere $(A(-8))^{-1}$? $\quad (A(-8))^{-1} = \left(\boxed{\begin{matrix} 4 & -7 & -9 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}} \right)$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Sei $\vec{v} = (1, 2, 3, 1)$ und $\vec{w} = (0, -1, -3, 1)$.

Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle = \boxed{-10}$

Zerlegen Sie $\vec{w}$ in einen Vektor $\vec{v_0}$ orthogonal zu $\vec{v}$ und einen Vektor $\vec{v_1} \in L(\vec{v})$:

$\vec{v_0} = \boxed{\frac{1}{3}\Big(2, 1, -3, 5\Big)}$ $\qquad$ $\vec{v_1} = \boxed{-\frac{2}{3}\Big(1, 2, 3, 1\Big)}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Für welches c ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 6 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ c \end{pmatrix} \quad \text{lösbar?}$$

$c = \boxed{-8}$.

Wie lautet die allgemeine Lösung für dieses c? $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2 - 2\lambda} \\ \boxed{4 - 4\lambda} \\ \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ und $z_2 = 1 - \mathrm{i}$. Geben Sie die Polarkoordinatendarstellungen von z_1 und z_2 an und berechnen Sie damit die Polarkoordinatendarstellungen von z_1^4 sowie z_2^{10}.

Welche Polarkoordinatendarstellung hat die komplexe Zahl $z = \dfrac{z_1^4}{z_2^{10}}$?

(In allen Fällen soll das Argument zwischen 0 und 2π liegen.)

$z_1 = \boxed{2\, e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}}}$ $\qquad$ $z_2 = \boxed{\sqrt{2}\, e^{\mathrm{i}\,\frac{7\pi}{4}}}$ $\qquad$ $z_1^4 = \boxed{16\, e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}}}$

$z_2^{10} = \boxed{32\, e^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{2}}}$ $\qquad$ $z = \boxed{\frac{1}{2}\, e^{\mathrm{i}\,\frac{7\pi}{6}}}$

(Hier wird die abkürzende Schreibweise $e^{\mathrm{i}\,t} := \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)$ verwendet.)

Aufgabe 8 (*9 Punkte*) In $\mathbb{R}^2$ seien die Standardbasis E: $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ und die Basis B: $b_1 = (1,-1)$, $b_2 = (2,1)$ gegeben. Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die durch

$$\alpha(b_1) = (4,8) \quad \text{und} \quad \alpha(b_2) = (2,4)$$

definierte lineare Abbildung.

1. Berechnen Sie die Matrixdarstellungen ${}_B\mathrm{id}_B$, ${}_E\mathrm{id}_B$ und ${}_B\mathrm{id}_E$.

$$ {}_B\mathrm{id}_B = \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}\right) \qquad {}_E\mathrm{id}_B = \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix}}\right) \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \left(\boxed{\begin{matrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix}}\right) $$

2. Berechnen Sie die Matrixdarstellungen ${}_E\alpha_B$, ${}_E\alpha_E$ und ${}_B\alpha_E$.

$$ {}_E\alpha_B = \left(\boxed{\begin{matrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{matrix}}\right) \qquad {}_E\alpha_E = \left(\boxed{\begin{matrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{matrix}}\right) \qquad {}_B\alpha_E = \left(\boxed{\begin{matrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{matrix}}\right) $$