Name: | **Matrikelnr.:** | **Fach:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^n x^n \qquad r = \boxed{\frac{1}{e}}.$$

Berechnen Sie den folgenden Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-\cos(x)}{x^2} = \boxed{-\frac{3}{2}}.$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Kreuzen Sie an, ob die gegebene Reihe konvergent oder divergent ist und geben Sie weiter ein Kriterium an, mit dessen Hilfe dies gezeigt werden kann. Kreuzen Sie nicht mehr als ein Kriterium an, auch wenn mehrere zutreffend sind. Falsche Kreuze geben Punktabzug.

	konvergent	divergent	Wurzel-Kriterium	Quotienten-Kriterium	Leibniz-Kriterium	keines davon (*)
$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(-2)^k}$	$\times$		$\times$	$\times$		
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k}$	$\times$		$\times$			
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k-2}$		$\times$				$\times$

(*) weder Wurzel-, noch Quotienten-, noch Leibnizkriterium liefert eine Aussage.

Aufgabe 4 (*8 Punkte*) Geben Sie – falls er existiert – den Grenzwert der nachfolgenden Folgen bzw. Reihen an. Falls keine Konvergenz vorliegt schreiben Sie „divergent" in das Ergebniskästchen.

(a) $\left(\frac{3k^4+2k^2+1}{2k^3-7k^4+2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ $\boxed{-\frac{3}{7}}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{12k^2-3}$ $\boxed{\frac{1}{6}}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ $\boxed{\frac{1}{2}}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $\boxed{\sin(2)}$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto xe^{2x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$T_3(f,x,0) = \boxed{x+2x^2+2x^3}$$

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto \sin(x^2)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = \sqrt{\pi}$.

$$T_2(g,x,x_0) = \boxed{-2\sqrt{\pi}\,(x-\sqrt{\pi}) - (x-\sqrt{\pi})^2}$$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^3 + 3x - 7$

$f_1'(x) = \boxed{6x^2 + 3}$ $\qquad f_1''(x) = \boxed{12x}$

(b) $f_2(x) : (-\infty, 1) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1-x}$

$f_2'(x) = \boxed{-\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}}$ $\qquad f_2''(x) = \boxed{-\frac{1}{4}(1-x)^{-3/2}}$

(c) $f_3(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^{x-1}$

$f_3'(x) = \boxed{2^{x-1} \ln 2}$ $\qquad f_3''(x) = \boxed{2^{x-1}(\ln 2)^2}$

(d) $f_4(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sinh(x^2)$

$f_4'(x) = \boxed{2x \cosh x^2}$ $\qquad f_4''(x) = \boxed{4x^2 \sinh x^2 + 2\cosh x^2}$

Aufgabe 7 (*7 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{\cos x}$$

(a) Bestimmen Sie den Wertebereich von g

$$W = \boxed{(0,1)}\,.$$

(b) Die Umkehrfunktion von g lautet

$$g^{-1} : \boxed{(0,1)} \to \boxed{\left(0, \frac{\pi}{2}\right)} : y \mapsto \boxed{\arccos(y^2)}\,.$$

(c) Die Formel zur Bestimmung der Ableitung von f^{-1} mit Hilfe der Ableitung von einer Funktion f lautet

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y)\bigg|_{y=f(x_0)} = \boxed{\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{d}{dx} f(x)}\bigg|_{x=x_0}}\,.$$

(d) Die Ableitung von g^{-1} lautet

$$\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\bigg|_{y=y_0} = \boxed{-\frac{2y_0}{\sqrt{1-y_0^4}}}\,.$$

Aufgabe 8 (*16 Punkte*) Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{4}\,\frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$$

durch.

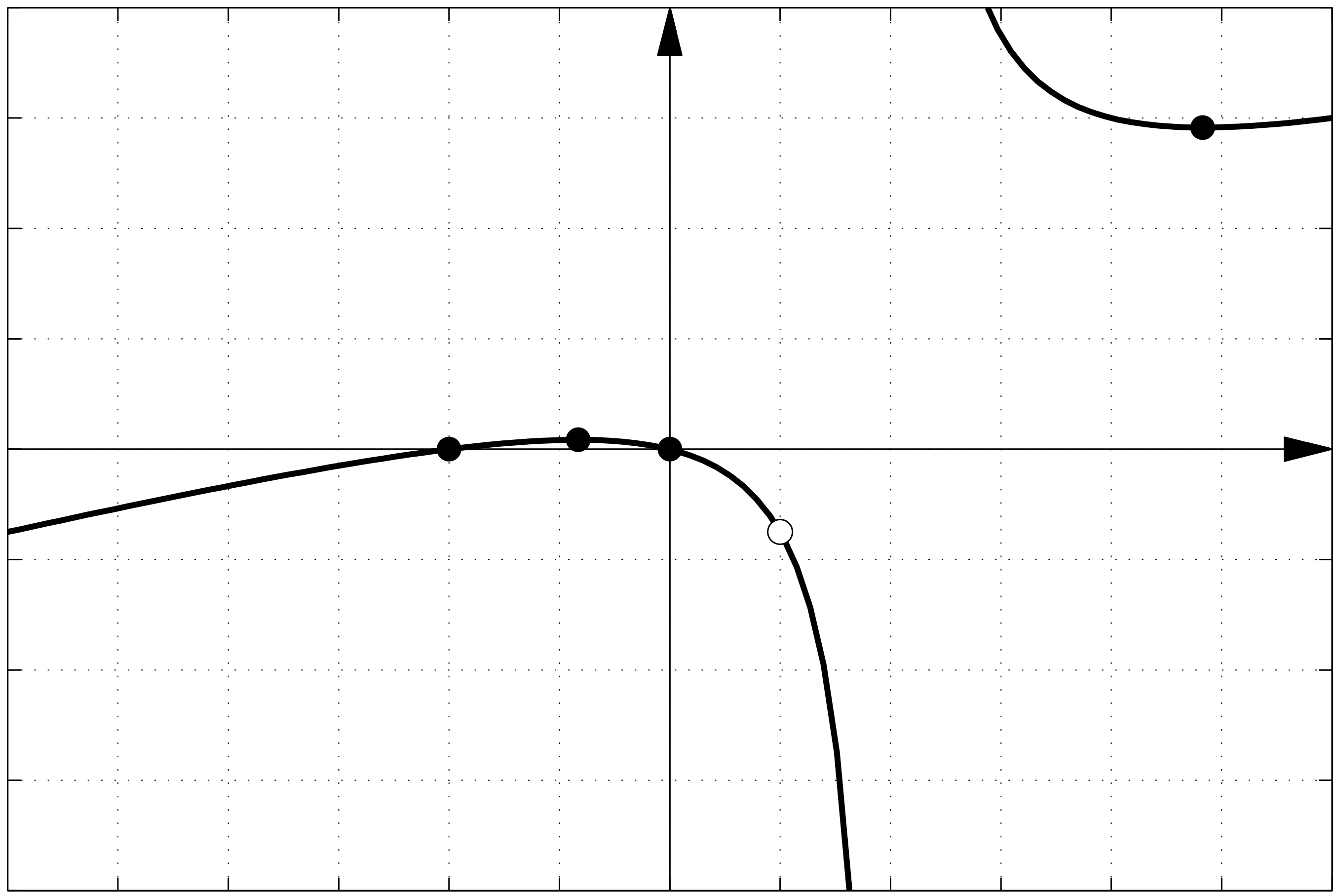
Der Definitionsbereich ist $D = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}}$. f hat Nullstellen an $x \in \boxed{\{-2, 0\}}$.

$f'(x) = \boxed{\dfrac{x^2 - 4x - 4}{4(x-2)^2}}$, $f''(x) = \boxed{4(x-2)^{-3}}$

f hat einen Tiefpunkt an $\boxed{\left(2\sqrt{2} + 2,\ \sqrt{2} + \frac{3}{2}\right)}$ und einen Hochpunkt an $\boxed{\left(2 - 2\sqrt{2},\ \frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)}$.

f hat in $x \in \boxed{\{2\}}$ senkrechte Asymptoten und ist in $x \in \boxed{\{1\}}$ stetig ergänzbar.

Skizze:



Name: | **Matrikelnr.:** | **Fach:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{(n^2)} x^n \qquad r = \boxed{0}.$$

Berechnen Sie den folgenden Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \cos(3x)}{x^2} = \boxed{4}.$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Kreuzen Sie an, ob die gegebene Reihe konvergent oder divergent ist und geben Sie weiter ein Kriterium an, mit dessen Hilfe dies gezeigt werden kann. Kreuzen Sie nicht mehr als ein Kriterium an, auch wenn mehrere zutreffend sind. Falsche Kreuze geben Punktabzug.

	konvergent	divergent	Wurzel-Kriterium	Quotienten-Kriterium	Leibniz-Kriterium	keines davon (*)
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k}$	$\times$				$\times$	
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k+1}$		$\times$				$\times$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{(-3)^k}$		$\times$	$\times$	$\times$		

(*) weder Wurzel-, noch Quotienten-, noch Leibnizkriterium liefert eine Aussage.

Aufgabe 4 (*8 Punkte*) Geben Sie – falls er existiert – den Grenzwert der nachfolgenden Folgen bzw. Reihen an. Falls keine Konvergenz vorliegt schreiben Sie „divergent“ in das Ergebniskästchen.

(a) $\left(\frac{3k^2 - k + 5k^3}{10k^2 - 4k + 1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ — divergent

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{8k^2 - 2}$ — $\frac{1}{4}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$ — $-\frac{1}{3}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ — e^{-1}

Aufgabe 5 (*6 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto xe^{x/2}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$T_3(f, x, 0) = \boxed{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^3}$$

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{\cos(x)}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = \pi/2$.

$$T_2(g, x, x_0) = \boxed{1 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x^3 + 2x - 6$

$f_1'(x) = \boxed{9x^2 + 2}$ $\quad f_1''(x) = \boxed{18x}$

(b) $f_2(x) : (-1/2, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{2x+1}$

$f_2'(x) = \boxed{(2x+1)^{-1/2}}$ $\quad f_2''(x) = \boxed{-(2x+1)^{-3/2}}$

(c) $f_3(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^{1-x}$

$f_3'(x) = \boxed{-2^{1-x} \ln 2}$ $\quad f_3''(x) = \boxed{2^{1-x}(\ln 2)^2}$

(d) $f_4(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cosh(x^2)$

$f_4'(x) = \boxed{2x \sinh x^2}$ $\quad f_4''(x) = \boxed{4x^2 \cosh x^2 + 2 \sinh x^2}$

Aufgabe 7 (*7 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{\sin x}$$

(a) Bestimmen Sie den Wertebereich von g

$$W = \boxed{(0,1)}\,.$$

(b) Die Umkehrfunktion von g lautet

$$g^{-1} : \boxed{(0,1)} \to \boxed{\left(0, \frac{\pi}{2}\right)} : y \mapsto \boxed{\arcsin(y^2)}\,.$$

(c) Die Formel zur Bestimmung der Ableitung von f^{-1} mit Hilfe der Ableitung von einer Funktion f lautet

$$\left.\frac{d}{dy} f^{-1}(y)\right|_{y=f(x_0)} = \boxed{\frac{1}{f'(x_0)} = \left.\frac{1}{\frac{d}{dx} f(x)}\right|_{x=x_0}}\,.$$

(d) Die Ableitung von g^{-1} lautet

$$\left.\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right|_{y=y_0} = \boxed{\frac{2y_0}{\sqrt{1-y_0^4}}}\,.$$

Aufgabe 8 (*16 Punkte*) Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{4}\,\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + x - 2}$$

durch.

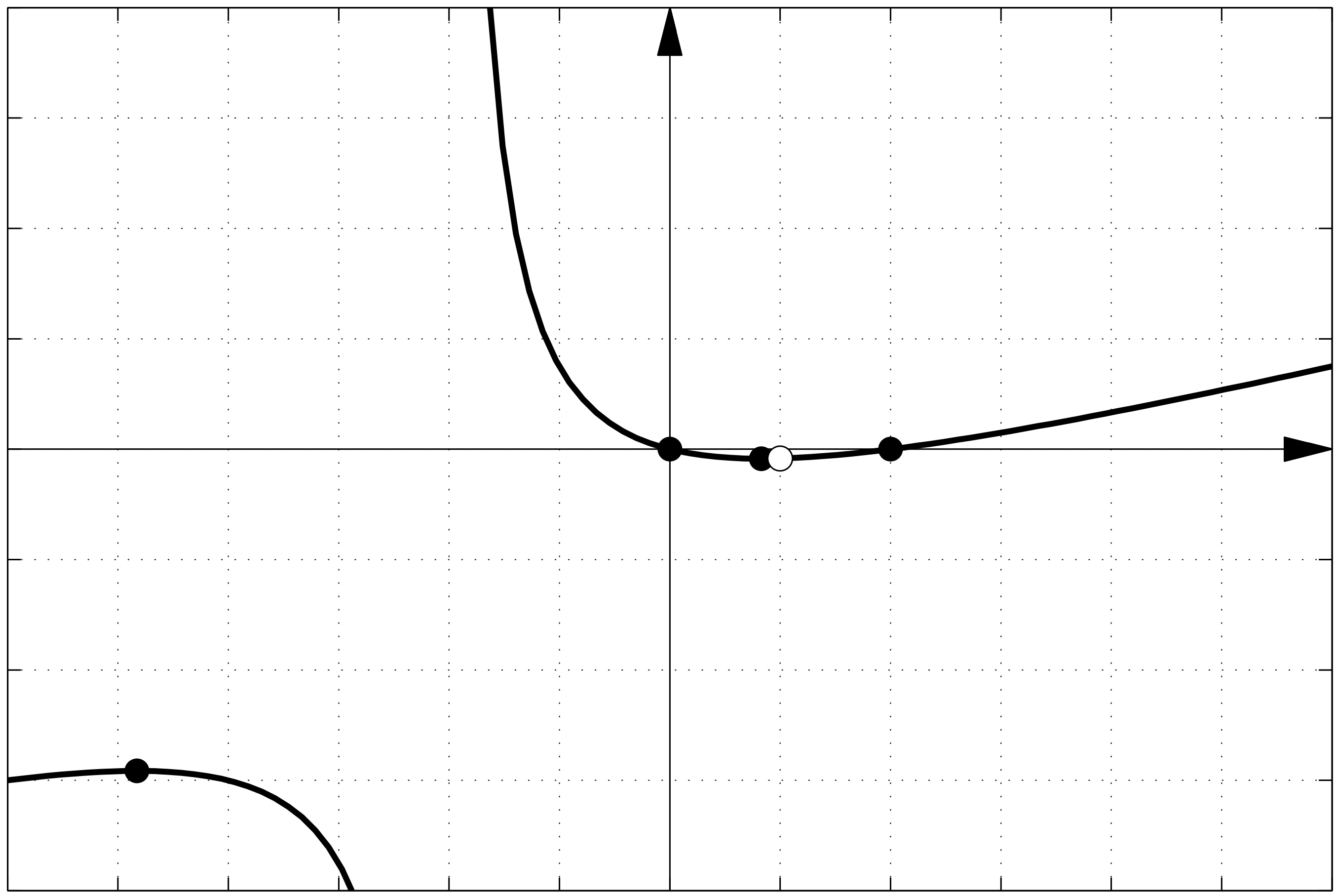
Der Definitionsbereich ist $D = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}}$. f hat Nullstellen an $x \in \boxed{\{0, 2\}}$.

$f'(x) = \boxed{\dfrac{x^2 + 4x - 4}{4(x+2)^2}}$, $\quad f''(x) = \boxed{4(x+2)^{-3}}$

f hat einen Tiefpunkt an $\boxed{\left(2\sqrt{2} - 2,\ \sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)}$ und einen Hochpunkt an $\boxed{\left(-2 - 2\sqrt{2},\ -\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)}$.

f hat in $x \in \boxed{\{-2\}}$ senkrechte Asymptoten und ist in $x \in \boxed{\{1\}}$ stetig ergänzbar.

Skizze:



Name: | | **Matrikelnr.:** | | **Fach:** | |

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | | **Gruppennr.:** | |

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^4 - 4n^3)x^n \qquad r = \boxed{1}\,.$$

Berechnen Sie den folgenden Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2} = \boxed{-\frac{5}{2}}\,.$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Kreuzen Sie an, ob die gegebene Reihe konvergent oder divergent ist und geben Sie weiter ein Kriterium an, mit dessen Hilfe dies gezeigt werden kann. Kreuzen Sie nicht mehr als ein Kriterium an, auch wenn mehrere zutreffend sind. Falsche Kreuze geben Punktabzug.

	konvergent	divergent	Wurzel-Kriterium	Quotienten-Kriterium	Leibniz-Kriterium	keines davon (*)
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k}$		$\times$	$\times$	$\times$		
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2k+1}$		$\times$				$\times$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$	$\times$		$\times$	$\times$		

(*) weder Wurzel-, noch Quotienten-, noch Leibnizkriterium liefert eine Aussage.

Aufgabe 4 (*8 Punkte*) Geben Sie – falls er existiert – den Grenzwert der nachfolgenden Folgen bzw. Reihen an. Falls keine Konvergenz vorliegt schreiben Sie „divergent“ in das Ergebniskästchen.

(a) $\left(\frac{-4k^3+k+4}{2k^2+5k^3+6}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ $\boxed{-\frac{4}{5}}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16k^2-4}$ $\boxed{\frac{1}{8}}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{4^k}$ $\boxed{\frac{2}{3}}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ $\boxed{\cos(1)}$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\sin(2x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$T_3(f,x,0) = \boxed{2x^2}$$

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)/x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = \pi/2$.

$$T_2(g,x,x_0) = \boxed{\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{8}{\pi^3}-\frac{1}{\pi}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x^3 + 2x - 5$

$f_1'(x) = \boxed{9x^2 + 2}$ $\quad f_1''(x) = \boxed{18x}$

(b) $f_2(x) : (-2, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x/2 + 1}$

$f_2'(x) = \boxed{\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} + 1\right)^{-1/2}}$ $\quad f_2''(x) = \boxed{-\frac{1}{16}\left(\frac{x}{2} + 1\right)^{-3/2}}$

(c) $f_3(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3^{x-1}$

$f_3'(x) = \boxed{3^{x-1} \ln 3}$ $\quad f_3''(x) = \boxed{3^{x-1}(\ln 3)^2}$

(d) $f_4(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cosh(x^3)$

$f_4'(x) = \boxed{3x^2 \sinh x^3}$ $\quad f_4''(x) = \boxed{9x^4 \cosh x^3 + 6x \sinh x^3}$

Aufgabe 7 (*7 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(\cos x)$$

(a) Bestimmen Sie den Wertebereich von g

$$W = \boxed{(-\infty, 0)}\,.$$

(b) Die Umkehrfunktion von g lautet

$$g^{-1} : \boxed{(-\infty, 0)} \to \boxed{\left(0, \frac{\pi}{2}\right)} : y \mapsto \boxed{\arccos(e^y)}\,.$$

(c) Die Formel zur Bestimmung der Ableitung von f^{-1} mit Hilfe der Ableitung von einer Funktion f lautet

$$\left.\frac{d}{dy} f^{-1}(y)\right|_{y=f(x_0)} = \boxed{\frac{1}{f'(x_0)} = \left.\frac{1}{\frac{d}{dx} f(x)}\right|_{x=x_0}}\,.$$

(d) Die Ableitung von g^{-1} lautet

$$\left.\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right|_{y=y_0} = \boxed{-\frac{e^{y_0}}{\sqrt{1 - e^{2y_0}}}}\,.$$

Aufgabe 8 (*16 Punkte*) Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{4}\,\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 2}$$

durch.

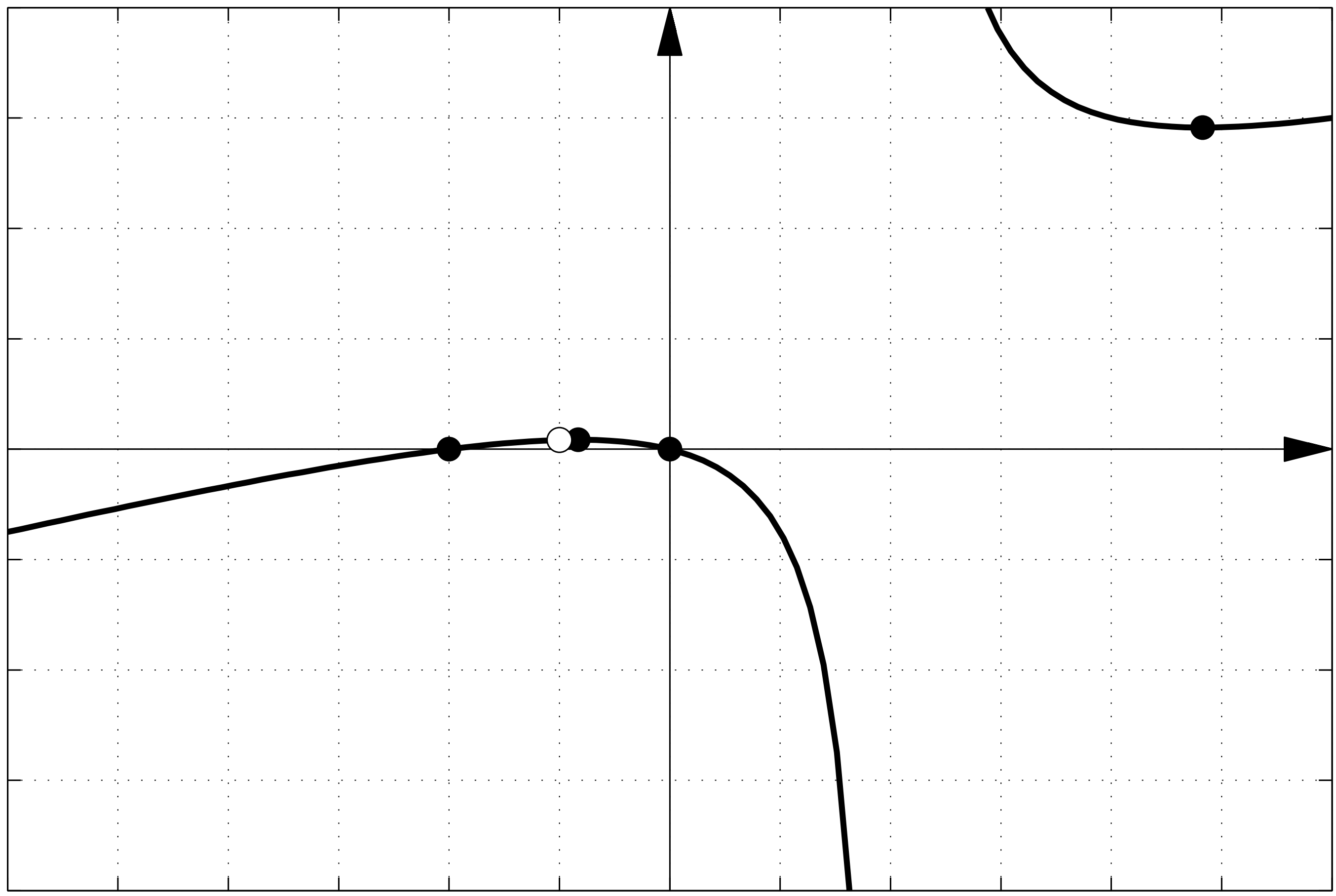
Der Definitionsbereich ist $D = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}}$. f hat Nullstellen an $x \in \boxed{\{-2, 0\}}$.

$f'(x) = \boxed{\dfrac{x^2 - 4x - 4}{4(x-2)^2}}$, $f''(x) = \boxed{4(x-2)^{-3}}$

f hat einen Tiefpunkt an $\boxed{\left(2\sqrt{2} + 2,\ \sqrt{2} + \frac{3}{2}\right)}$ und einen Hochpunkt an $\boxed{\left(2 - 2\sqrt{2},\ \frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)}$.

f hat in $x \in \boxed{\{2\}}$ senkrechte Asymptoten und ist in $x \in \boxed{\{-1\}}$ stetig ergänzbar.

Skizze:



Name: ☐ **Matrikelnr.:** ☐ **Fach:** ☐

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Gruppennr.:** ☐

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} x^n \qquad r = \boxed{e}.$$

Berechnen Sie den folgenden Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{x^2} = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Kreuzen Sie an, ob die gegebene Reihe konvergent oder divergent ist und geben Sie weiter ein Kriterium an, mit dessen Hilfe dies gezeigt werden kann. Kreuzen Sie nicht mehr als ein Kriterium an, auch wenn mehrere zutreffend sind. Falsche Kreuze geben Punktabzug.

	konvergent	divergent	Wurzel-Kriterium	Quotienten-Kriterium	Leibniz-Kriterium	keines davon (*)
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$		$\times$				$\times$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3-(-1)^k}{2^k}$	$\times$		$\times$			
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$	$\times$		$\times$	$\times$	$\times$	

(*) weder Wurzel-, noch Quotienten-, noch Leibnizkriterium liefert eine Aussage.

Aufgabe 4 (*8 Punkte*) Geben Sie – falls er existiert – den Grenzwert der nachfolgenden Folgen bzw. Reihen an. Falls keine Konvergenz vorliegt schreiben Sie „divergent" in das Ergebniskästchen.

(a) $\left(\frac{3k^4-2k+2}{2k^3-5k^4+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ $\boxed{-\frac{3}{5}}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{20k^2-5}$ $\boxed{\frac{1}{10}}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k}$ $\boxed{-\frac{1}{4}}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{k!}$ $\boxed{e^{-2}}$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\cos(2x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$T_3(f, x, 0) = \boxed{x - 2x^3}$$

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)/x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = \pi/2$.

$$T_2(g, x, x_0) = \boxed{-\frac{2}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^3 + 3x - 4$

$f_1'(x) = \boxed{6x^2 + 3}$ $\quad f_1''(x) = \boxed{12x}$

(b) $f_2(x) : (-2, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x+2}$

$f_2'(x) = \boxed{\frac{1}{2}(x+2)^{-1/2}}$ $\quad f_2''(x) = \boxed{-\frac{1}{4}(x+2)^{-3/2}}$

(c) $f_3(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3^{1-x}$

$f_3'(x) = \boxed{-3^{1-x}\ln 3}$ $\quad f_3''(x) = \boxed{3^{1-x}(\ln 3)^2}$

(d) $f_4(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sinh(x^3)$

$f_4'(x) = \boxed{3x^2 \cosh x^3}$ $\quad f_4''(x) = \boxed{9x^4 \sinh x^3 + 6x \cosh x^3}$

Aufgabe 7 (*7 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(\sin x)$$

(a) Bestimmen Sie den Wertebereich von g

$$W = \boxed{(-\infty, 0)}\,.$$

(b) Die Umkehrfunktion von g lautet

$$g^{-1} : \boxed{(-\infty, 0)} \to \boxed{\left(0, \frac{\pi}{2}\right)} : y \mapsto \boxed{\arcsin(e^y)}\,.$$

(c) Die Formel zur Bestimmung der Ableitung von f^{-1} mit Hilfe der Ableitung von einer Funktion f lautet

$$\left.\frac{d}{dy} f^{-1}(y)\right|_{y=f(x_0)} = \boxed{\frac{1}{f'(x_0)} = \left.\frac{1}{\frac{d}{dx} f(x)}\right|_{x=x_0}}\,.$$

(d) Die Ableitung von g^{-1} lautet

$$\left.\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right|_{y=y_0} = \boxed{\frac{e^{y_0}}{\sqrt{1-e^{2y_0}}}}\,.$$

Aufgabe 8 (*16 Punkte*) Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{4}\,\frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 + 3x + 2}$$

durch.

Der Definitionsbereich ist $D = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}}$. f hat Nullstellen an $x \in \boxed{\{0, 2\}}$.

$f'(x) = \boxed{\dfrac{x^2 + 4x - 4}{4(x+2)^2}}$, $f''(x) = \boxed{4(x+2)^{-3}}$

f hat einen Tiefpunkt an $\boxed{\left(2\sqrt{2} - 2,\ \sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)}$ und einen Hochpunkt an $\boxed{\left(-2 - 2\sqrt{2},\ -\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)}$.

f hat in $x \in \boxed{\{-2\}}$ senkrechte Asymptoten und ist in $x \in \boxed{\{-1\}}$ stetig ergänzbar.

Skizze: