Name: | **Matrikelnr.:** | **Fach:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*)

Die reelle Matrix A_t ist gegeben durch

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie das charakteristische Polynom χ_{A_t} von A_t in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ an:

$$\chi_{A_t}(\lambda) = \boxed{\lambda^2 - \lambda - 2t}$$

Für welches $t \in \mathbb{R}$ sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$ Eigenwerte von A_t?

$$t = \boxed{3}$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*)

Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto M_s v$ mit der Matrix

$$M_s = \begin{pmatrix} 4 & -6 & s \\ s & 3 & 1 \\ -8 & 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det(M_s)$: $\det(M_s) = \boxed{12s^2 + 48s + 48}$

Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist M_s regulär? $\boxed{s \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}}$

Geben Sie für $s = -2$ die Dimension des Kerns und für $s = 3$ die Dimension des Bildes von φ_s an:

$\dim \operatorname{Kern}(\varphi_{-2}) = \boxed{2}$ $\dim \operatorname{Bild}(\varphi_3) = \boxed{3}$

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Die reelle Matrix B ist folgendermaßen definiert:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_B(\lambda)$ von B an:

$\chi_B(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 4}$

(b) Es ist $v_1 = (3, 1, 1)^\mathsf{T}$ ein Eigenvektor der Matrix B zum Eigenwert μ_1. Berechnen Sie μ_1:

$\mu_1 = \boxed{2}$

(c) Bestimmen Sie die weiteren Eigenwerte μ_2, μ_3 und die entsprechenden Eigenvektoren v_2, v_3 von B:

$\mu_2 = \boxed{-2}$ $\mu_3 = \boxed{-1}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*)

(a) Betrachten Sie die affine Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av + t$ und die Gerade g mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \qquad g : x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie $\alpha(g)$:

$$\alpha(g) : \boxed{x = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(b) Weitere affine Abbildungen $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto Bv + s$ und $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto Cv + r$ sind definiert durch

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie den linearen Anteil und den Translationsanteil von $\beta \circ \gamma$ an:

$$\text{linearer Anteil: } \left(\boxed{\begin{matrix} 7 & 11 \\ -11 & 1 \end{matrix}} \right) \qquad \text{Translationsanteil: } \left(\boxed{\begin{matrix} 7 \\ 4 \end{matrix}} \right)$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Im $\mathbb{R}^2$ ist das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ und ein weiteres Koordinatensystem $\mathbb{F}$ mit

$$\mathbb{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben. Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \boxed{\tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

Gegeben sind die Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ sowie die Matrix $H \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie x_1, x_2, x_3 so, dass $\{x, y, z\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bildet. Geben Sie für diese Zahlen x_1, x_2, x_3 die Inverse der Matrix H an (Nenner müssen nicht rational sein).

$$x = \boxed{\frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}} \qquad H^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{\sqrt{18}} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*)

Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 - 5 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie die symmetrische Matrix A, die den quadratischen Anteil beschreibt. Bringen Sie A auf Diagonalgestalt D.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Geben Sie die affine Klassifikation von Q an: paralleles Geradenpaar

Name: | **Matrikelnr.:** | **Fach:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*)

Die reelle Matrix A_t ist gegeben durch

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie das charakteristische Polynom χ_{A_t} von A_t in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ an:

$$\chi_{A_t}(\lambda) = \boxed{\lambda^2 - \lambda + 3t}$$

Für welches $t \in \mathbb{R}$ sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$ Eigenwerte von A_t?

$$t = \boxed{-2}$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*)

Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto M_s v$ mit der Matrix

$$M_s = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ s & -1 & 7 \\ 4 & s & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det(M_s)$: $\det(M_s) = \boxed{-2s^2 + 7s - 3}$

Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist M_s regulär? $\boxed{s \in \mathbb{R}\backslash\{3, \frac{1}{2}\}}$

Geben Sie für $s = -2$ die Dimension des Kerns und für $s = 3$ die Dimension des Bildes von φ_s an:

$\dim \operatorname{Kern}(\varphi_{-2}) = \boxed{0}$ $\dim \operatorname{Bild}(\varphi_3) = \boxed{2}$

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Die reelle Matrix B ist folgendermaßen definiert:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -10 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_B(\lambda)$ von B an:

$\chi_B(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 - 8\lambda^2 + 4\lambda + 32}$

(b) Es ist $v_1 = (1, -1, 1)^\mathsf{T}$ ein Eigenvektor der Matrix B zum Eigenwert μ_1. Berechnen Sie μ_1:

$\mu_1 = \boxed{2}$

(c) Bestimmen Sie die weiteren Eigenwerte μ_2, μ_3 und die entsprechenden Eigenvektoren v_2, v_3 von B:

$\mu_2 = \boxed{-8}$ $\mu_3 = \boxed{-2}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*)

(a) Betrachten Sie die affine Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av + t$ und die Gerade g mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad g : x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie $\alpha(g)$:

$$\alpha(g) : \boxed{x = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(b) Weitere affine Abbildungen $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto Bv + s$ und $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto Cv + r$ sind definiert durch

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie den linearen Anteil und den Translationsanteil von $\beta \circ \gamma$ an:

linearer Anteil: $\left(\boxed{\begin{matrix} 6 & 13 \\ -14 & -2 \end{matrix}}\right)$ Translationsanteil: $\left(\boxed{\begin{matrix} -6 \\ -17 \end{matrix}}\right)$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Im $\mathbb{R}^2$ ist das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ und ein weiteres Koordinatensystem $\mathbb{F}$ mit

$$\mathbb{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben. Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \boxed{\tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

Gegeben sind die Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ sowie die Matrix $H \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie x_1, x_2, x_3 so, dass $\{x, y, z\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bildet. Geben Sie für diese Zahlen x_1, x_2, x_3 die Inverse der Matrix H an (Nenner müssen nicht rational sein).

$$x = \boxed{\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}} \qquad H^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*)

Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -3x_1^2 + 4x_1x_2 - 1 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie die symmetrische Matrix A, die den quadratischen Anteil beschreibt. Bringen Sie A auf Diagonalgestalt D.

$$A = \left(\boxed{\begin{matrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{matrix}} \right) \qquad D = \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{matrix}} \right)$$

Geben Sie die affine Klassifikation von Q an: Hyperbel

Name: ☐ **Matrikelnr.:** ☐ **Fach:** ☐

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Gruppennr.:** ☐

Aufgabe 2 (*3 Punkte*)

Die reelle Matrix A_t ist gegeben durch

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & t \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie das charakteristische Polynom χ_{A_t} von A_t in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ an:

$$\chi_{A_t}(\lambda) = \boxed{\lambda^2 - \lambda - 2 + t}$$

Für welches $t \in \mathbb{R}$ sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$ Eigenwerte von A_t?

$$t = \boxed{-4}$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*)

Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto M_s v$ mit der Matrix

$$M_s = \begin{pmatrix} -3 & 1 & s \\ -1 & s & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det(M_s)$: $\det(M_s) = \boxed{-2s^2 - 10s + 72}$

Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist M_s regulär? $\boxed{s \in \mathbb{R}\backslash\{-9, 4\}}$

Geben Sie für $s = 4$ die Dimension des Kerns und für $s = -3$ die Dimension des Bildes von φ_s an:

$\dim \mathrm{Kern}(\varphi_4) = \boxed{1}$ $\dim \mathrm{Bild}(\varphi_{-3}) = \boxed{3}$

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Die reelle Matrix B ist folgendermaßen definiert:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_B(\lambda)$ von B an:

$\chi_B(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8}$

(b) Es ist $v_1 = (-1, 1, 2)^\mathsf{T}$ ein Eigenvektor der Matrix B zum Eigenwert μ_1. Berechnen Sie μ_1:

$\mu_1 = \boxed{4}$

(c) Bestimmen Sie die weiteren Eigenwerte μ_2, μ_3 und die entsprechenden Eigenvektoren v_2, v_3 von B:

$\mu_2 = \boxed{1}$ $\mu_3 = \boxed{2}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*)

(a) Betrachten Sie die affine Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av + t$ und die Gerade g mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad g : x = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie $\alpha(g)$:

$$\alpha(g) : \quad \boxed{x = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(b) Weitere affine Abbildungen $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto Bv + s$ und $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto Cv + r$ sind definiert durch

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie den linearen Anteil und den Translationsanteil von $\beta \circ \gamma$ an:

$$\text{linearer Anteil: } \left(\boxed{\begin{matrix} -6 & -16 \\ 16 & 3 \end{matrix}}\right) \qquad \text{Translationsanteil: } \left(\boxed{\begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix}}\right)$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Im $\mathbb{R}^2$ ist das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ und ein weiteres Koordinatensystem $\mathbb{F}$ mit

$$\mathbb{F} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben. Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \boxed{\tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

Gegeben sind die Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ sowie die Matrix $H \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie x_1, x_2, x_3 so, dass $\{x, y, z\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bildet. Geben Sie für diese Zahlen x_1, x_2, x_3 die Inverse der Matrix H an (Nenner müssen nicht rational sein).

$$x = \boxed{\frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad H^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*)

Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 8x_1x_2 + 6x_2^2 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie die symmetrische Matrix A, die den quadratischen Anteil beschreibt. Bringen Sie A auf Diagonalgestalt D.

$$A = \left(\boxed{\begin{matrix} 0 & 4 \\ 4 & 6 \end{matrix}} \right) \qquad D = \left(\boxed{\begin{matrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{matrix}} \right)$$

Geben Sie die affine Klassifikation von Q an: $\boxed{\text{schneidendes Geradenpaar}}$

Name: | **Matrikelnr.:** | **Fach:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*)

Die reelle Matrix A_t ist gegeben durch

$$A_t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ t & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie das charakteristische Polynom χ_{A_t} von A_t in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ an:

$$\chi_{A_t}(\lambda) = \boxed{\lambda^2 - \lambda - 2 - 2t}$$

Für welches $t \in \mathbb{R}$ sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$ Eigenwerte von A_t?

$$t = \boxed{2}$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*)

Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto M_s v$ mit der Matrix

$$M_s = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ -2 & 1 & s \\ 8 & s & 16 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det(M_s)$: $\det(M_s) = \boxed{-6s^2 - 48s - 96}$

Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist M_s regulär? $\boxed{s \in \mathbb{R}\backslash\{-4\}}$

Geben Sie für $s = 2$ die Dimension des Kerns und für $s = -4$ die Dimension des Bildes von φ_s an:

$\dim \operatorname{Kern}(\varphi_2) = \boxed{0}$ $\dim \operatorname{Bild}(\varphi_{-4}) = \boxed{1}$

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Die reelle Matrix B ist folgendermaßen definiert:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_B(\lambda)$ von B an:

$$\chi_B(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12}$$

(b) Es ist $v_1 = (1, 2, 1)^\mathsf{T}$ ein Eigenvektor der Matrix B zum Eigenwert μ_1. Berechnen Sie μ_1:

$$\mu_1 = \boxed{1}$$

(c) Bestimmen Sie die weiteren Eigenwerte μ_2, μ_3 und die entsprechenden Eigenvektoren v_2, v_3 von B:

$\mu_2 = \boxed{3}$ $\mu_3 = \boxed{4}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*)

(a) Betrachten Sie die affine Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av + t$ und die Gerade g mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -6 & -4 \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad g : x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie $\alpha(g)$:

$$\alpha(g) : \quad \boxed{x = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(b) Weitere affine Abbildungen $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto Bv + s$ und $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto Cv + r$ sind definiert durch

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie den linearen Anteil und den Translationsanteil von $\beta \circ \gamma$ an:

linearer Anteil: $\left(\boxed{\begin{matrix} 7 & 18 \\ 3 & 17 \end{matrix}} \right)$ Translationsanteil: $\left(\boxed{\begin{matrix} 9 \\ 2 \end{matrix}} \right)$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Im $\mathbb{R}^2$ ist das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ und ein weiteres Koordinatensystem $\mathbb{F}$ mit

$$\mathbb{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben. Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \boxed{\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

Gegeben sind die Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ sowie die Matrix $H \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} \\ -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie x_1, x_2, x_3 so, dass $\{x, y, z\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bildet. Geben Sie für diese Zahlen x_1, x_2, x_3 die Inverse der Matrix H an (Nenner müssen nicht rational sein).

$$x = \boxed{\frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad H^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{2}{\sqrt{22}} & 0 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*)

Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 6x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 3 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie die symmetrische Matrix A, die den quadratischen Anteil beschreibt. Bringen Sie A auf Diagonalgestalt D.

$$A = \left(\boxed{\begin{matrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{matrix}} \right) \qquad D = \left(\boxed{\begin{matrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}} \right)$$

Geben Sie die affine Klassifikation von Q an: Ellipse