Name: | | **Matrikelnr.:** | | **Fach:** | |

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte										

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | | **Gruppennr.:** | |

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen B und C:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & c & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ der Matrix B:

$\lambda_1 =$ $\boxed{}$ $\lambda_2 =$ $\boxed{}$

(b) Für welches c ist $v = (1, 2, -3)^\mathsf{T}$ ein Eigenvektor der Matrix C:

$c =$ $\boxed{}$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*)

(a) Es ist die affine Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av + t$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad t = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weiter ist die Gerade

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

gegeben. Bestimmen Sie

$$\alpha(g) = \boxed{}$$

(b) Gegeben sind weitere affine Abbildung $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto Bv+s$ und $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto Cv+r$ gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Geben Sie den linearen Anteil und den Translationsanteil von $\beta \circ \gamma$ an:

linearer Anteil: $\left(\boxed{}\right)$ Translationsanteil: $\left(\boxed{}\right)$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)

Geben Sie jeweils das Supremum, das Infimum, den größten Häufungspunkt $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ sowie den kleinsten Häufungspunkt $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, wobei

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n n}{n}.$$

$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \boxed{}$ $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \boxed{}$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \boxed{}$ $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \boxed{}$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben ist die reelle Matrix A und der Vektor v_1 mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 der Matrix A zum Eigenvektor v_1: $\lambda_1 = \boxed{}$

(b) Der zu λ_1 gehörige Eigenraum $V(\lambda_1)$ ist zweidimensional. Bestimmen Sie eine orthogonale Basis von $V(\lambda_1)$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \left(\boxed{}\right)$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*)

Geben Sie den Grenzwert der Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an ($\pm\infty$ bei bestimmter Divergenz):

$$b_n = \frac{n(n-2)+1}{(4-3n)^2}, \qquad c_n = n \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right), \qquad d_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left(\frac{3}{2}\right)^{n-k}.$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \boxed{} \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = \boxed{} \qquad \lim_{n\to\infty} d_n = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Im $\mathbb{R}^2$ sind zwei Koordinatensysteme $\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$ mit

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

gegeben. Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) = \boxed{} \qquad {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*)

Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x_1^2 - 12x_1 + 5x_2 - 1 = 0 \right\} .$$

Bestimmen Sie den Vektor a, der den linearen Anteil der Quadrik beschreibt. Führen Sie eine Hauptachsentransformation durch und ermitteln Sie die Koordinaten ${}_{\mathbb{E}}P$ des neuen Ursprungs P.

$$a = \left(\boxed{} \right) \qquad {}_{\mathbb{E}}P = \left(\boxed{} \right)$$

Geben Sie die affine Klassifikation von Q an: $\boxed{}$

Aufgabe 9 (*5 Punkte*)

Betrachten Sie die Matrix M_r und die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Kv$ mit den Matrizen

$$M_r = \begin{pmatrix} r & 3 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -3 & r & 0 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det(M_r)$: $\det(M_r) = \boxed{}$

Für welche $r \in \mathbb{R}$ ist M_r singulär (d. h. nicht regulär) ? $\boxed{}$

Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}$ des Kerns der Abbildung φ an und bestimmen Sie die Dimension:

$$\dim \operatorname{Kern}(\varphi) = \boxed{} \qquad \mathcal{B} = \boxed{}$$