

Name:

Matrikelnr.:

Fach:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte										

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (3 Punkte) Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen B und C :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & c & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ der Matrix B :

$$\lambda_1 = \boxed{2 + 4i} \quad \lambda_2 = \boxed{2 - 4i}$$

(b) Für welches c ist $v = (1, 2, -3)^T$ ein Eigenvektor der Matrix C :

$$c = \boxed{2}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

(a) Es ist die affine Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av + t$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weiter ist die Gerade

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

gegeben. Bestimmen Sie

$$\alpha(g) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(b) Gegeben sind weitere affine Abbildung $\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : v \mapsto Bv + s$ und $\gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : v \mapsto Cv + r$ gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Geben Sie den linearen Anteil und den Translationsanteil von $\beta \circ \gamma$ an:

$$\text{linearer Anteil: } \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{Translationsanteil: } \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Geben Sie jeweils das Supremum, das Infimum, den größten Häufungspunkt $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ sowie den kleinsten Häufungspunkt $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, wobei

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n n}{n}.$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \boxed{\frac{3}{2}} \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = \boxed{-1} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \boxed{1} \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \boxed{-1}$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Gegeben ist die reelle Matrix A und der Vektor v_1 mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 der Matrix A zum Eigenvektor v_1 : $\lambda_1 = \boxed{-2}$

(b) Der zu λ_1 gehörige Eigenraum $V(\lambda_1)$ ist zweidimensional. Bestimmen Sie eine orthogonale Basis von $V(\lambda_1)$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Geben Sie den Grenzwert der Folgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an ($\pm\infty$ bei bestimmter Divergenz):

$$b_n = \frac{n(n-2)+1}{(4-3n)^2}, \quad c_n = n \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right), \quad d_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \left(\frac{3}{2}\right)^{n-k}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \boxed{\frac{1}{9}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \boxed{+\infty} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \boxed{0}$$

Aufgabe 7 (6 Punkte) Im \mathbb{R}^2 sind zwei Koordinatensysteme \mathbb{F} und \mathbb{G} mit

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben. Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \left(v - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \quad {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \left(v + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 4x_1^2 - 12x_1 + 5x_2 - 1 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie den Vektor a , der den linearen Anteil der Quadrik beschreibt. Führen Sie eine Hauptachsentransformation durch und ermitteln Sie die Koordinaten ${}_{\mathbb{E}}P$ des neuen Ursprungs P .

$$a = \left(\begin{array}{c} -6 \\ 5 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right) \quad {}_{\mathbb{E}}P = \left(\begin{array}{c} \frac{3}{2} \\ 2 \end{array} \right)$$

Geben Sie die affine Klassifikation von Q an:

Parabel

Aufgabe 9 (5 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix M_r und die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 : v \mapsto Kv$ mit den Matrizen

$$M_r = \begin{pmatrix} r & 3 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -3 & r & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det(M_r)$:

$$\det(M_r) = 2r^2 + 2r - 12$$

Für welche $r \in \mathbb{R}$ ist M_r singular (d. h. nicht regulär) ?

$$r \in \{-3, 2\}$$

Geben Sie eine Basis \mathcal{B} des Kerns der Abbildung φ an und bestimmen Sie die Dimension:

$$\dim \text{Kern}(\varphi) =$$

2

$$\mathcal{B} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$