Name: | **Matrikelnr.:** | **Fach:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte								

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto e^{-x^2} \cos\left(y^2 - 3y\right)$

$f_x(x, y) =$ | $f_y(x, y) =$

(b) $g : \mathbb{R} \times \big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big) \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \dfrac{2x^2 + y^2}{y}$

$g_x(x, y) =$ | $g_y(x, y) =$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*)

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^4 + 2x\cos(y)\,.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten:

$$\operatorname{grad} f\left(1\,, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\boxed{}\,,\boxed{}\right)^{\mathsf{T}}$$

(b) Berechnen Sie die Hessematrix:

$$\mathrm{H}f\left(1\,, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}.$$

(c) Damit erhält man das Taylorpolynom der Stufe 2 von f um den Entwicklungspunkt $\left(1\,, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$T_2\left(f, (x,y), \left(1\,, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \boxed{}\,.$$

Aufgabe 4 (*9 Punkte*) Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale. Prüfen Sie zusätzlich, ob die entsprechenden uneigentlichen Integrale existieren. Falls ja, schreiben Sie den Wert in das entsprechende Kästchen, andernfalls tragen Sie **Nein** ein.

(a) $\displaystyle\int xe^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$ $\qquad\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$

(b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x(\ln x)^3} = \boxed{}$ $\qquad\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x(\ln x)^3} = \boxed{}$

(c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x^{1+1/\ln x}} = \boxed{}$ $\qquad\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x^{1+1/\ln x}} = \boxed{}$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*)

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f : D \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ \ln(xy) \end{pmatrix},$$

wobei D ein geeigneter Definitionsbereich ist.

(a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D an.

$D = \boxed{}$

(b) Geben Sie die Jacobi-Matrix $\mathrm{J}f(x, y)$ an.

$$\mathrm{J}f(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen Sie für $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ und $b_n = 2 - \dfrac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n, b_n) = \left(\boxed{}, \boxed{} \right)^{\mathsf{T}}.$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben seien die Vektorfelder

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 2x\sin(x^2) + \cos(y) \\ -x\sin(y) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} xe^y \\ x^2e^y \\ -3z^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x, y) = \boxed{}$

und $\operatorname{rot} g(x, y, z) = \left(\boxed{}, \boxed{}, \boxed{} \right)^{\mathsf{T}}.$

(b) Eines der beiden Vektorfelder besitzt ein Potential U. Berechnen Sie ein solches.

$$U : \mathbb{R}^{\boxed{}} \to \mathbb{R} : \boxed{} \mapsto \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*10 Punkte*)

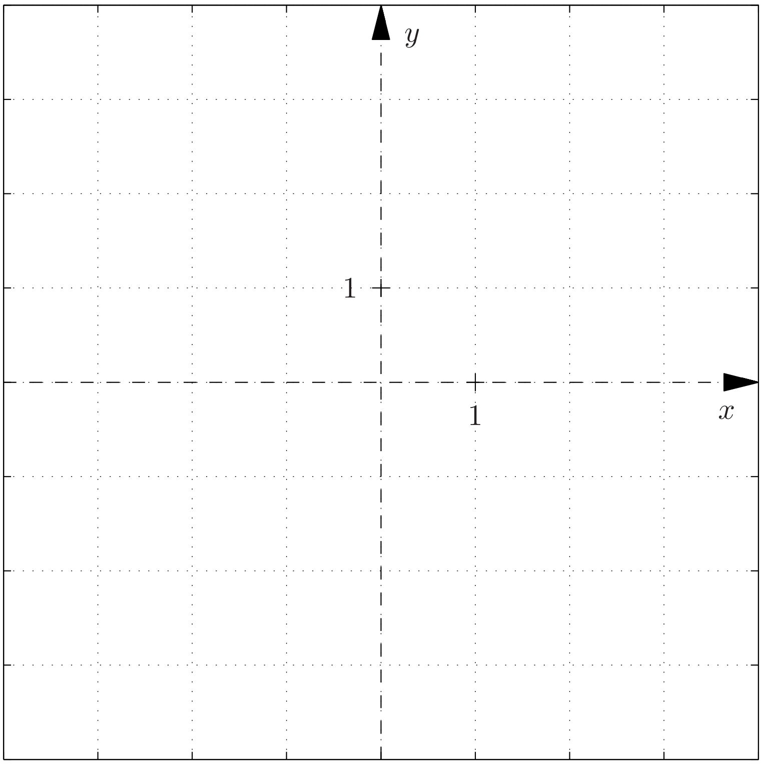
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \left(y^2 - x^2\right)\left(y^2 - 2x^2\right) .$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten von g.

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \left(\boxed{} , \boxed{} \right)^\top$$

(b) Skizzieren Sie die Gebiete für die die Funktion $f(x, y) = 0$, $f(x, y) > 0$ bzw. $f(x, y) < 0$ ist.



(c) Geben Sie alle kritischen Stellen der Funktion f und deren Typ an.