Name: ☐ **Matrikelnr.:** ☐ **Fach:** ☐

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte								

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Gruppennr.:** ☐

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto e^{-x^2} \cos\left(y^2 - 3y\right)$

$f_x(x, y) = \boxed{-2xe^{-x^2} \cos\left(y^2 - 3y\right)}$ $\quad f_y(x, y) = \boxed{-\left(2y - 3\right) e^{-x^2} \sin\left(y^2 - 3y\right)}$

(b) $g : \mathbb{R} \times \big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big) \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \dfrac{2x^2 + y^2}{y}$

$g_x(x, y) = \boxed{\dfrac{4x}{y}}$ $\quad g_y(x, y) = \boxed{\dfrac{y^2 - 2x^2}{y^2}}$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*)

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^4 + 2x\cos(y)\,.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten:

$$\operatorname{grad} f\left(1\,,\frac{\pi}{2}\right) = \left(\boxed{4}\,,\boxed{-2} \right)^{\mathsf{T}}$$

(b) Berechnen Sie die Hessematrix:

$$\mathrm{H}f\left(1\,,\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \boxed{12} & \boxed{-2} \\ \boxed{-2} & \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

(c) Damit erhält man das Taylorpolynom der Stufe 2 von f um den Entwicklungspunkt $\left(1\,,\frac{\pi}{2}\right)$:

$$T_2\left(f, (x,y), \left(1\,,\frac{\pi}{2}\right)\right) = \boxed{1 + 4\,(x-1) - 2\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + 6\,(x-1)^2 - 2\,(x-1)\left(y - \frac{\pi}{2}\right)}\,.$$

Aufgabe 4 (*9 Punkte*) Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale. Prüfen Sie zusätzlich, ob die entsprechenden uneigentlichen Integrale existieren. Falls ja, schreiben Sie den Wert in das entsprechende Kästchen, andernfalls tragen Sie **Nein** ein.

(a) $\displaystyle\int xe^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{[-(x+1)e^{-x}]}$ $\qquad$ $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{1}$

(b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x(\ln x)^3} = \boxed{\left[-\frac{1}{2(\ln(x))^2}\right]}$ $\qquad$ $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x(\ln x)^3} = \boxed{(\ln 2)^{-2}/2}$

(c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x^{1+1/\ln x}} = \boxed{\left[\frac{\ln|x|}{e}\right]}$ $\qquad$ $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x^{1+1/\ln x}} = \boxed{\text{Nein}}$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*)

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f : D \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ \ln(xy) \end{pmatrix},$$

wobei D ein geeigneter Definitionsbereich ist.

(a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D an.

$$D = \boxed{\left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\right) \cup \left(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-\right)}$$

(b) Geben Sie die Jacobi-Matrix $\mathrm{J}f(x,y)$ an.

$$\mathrm{J}f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{\frac{1}{x}} & \boxed{\frac{1}{y}} \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen Sie für $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ und $b_n = 2 - \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n, b_n) = \left(\boxed{3}, \boxed{\ln(2)} \right)^{\mathsf{T}}.$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben seien die Vektorfelder

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} 2x\sin(x^2) + \cos(y) \\ -x\sin(y) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} xe^y \\ x^2e^y \\ -3z^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{div} f(x,y) = \boxed{2\sin(x^2) + 4x^2\cos(x^2) - x\cos(y)}$

und $\operatorname{rot} g(x,y,z) = \left(\boxed{0}, \boxed{0}, \boxed{xe^y} \right)^{\mathsf{T}}.$

(b) Eines der beiden Vektorfelder besitzt ein Potential U. Berechnen Sie ein solches.

$$U : \mathbb{R}^{\boxed{2}} \to \mathbb{R} : \boxed{(x,y)} \mapsto \boxed{-\cos(x^2) + x\cos(y)}$$

Aufgabe 7 (*10 Punkte*)

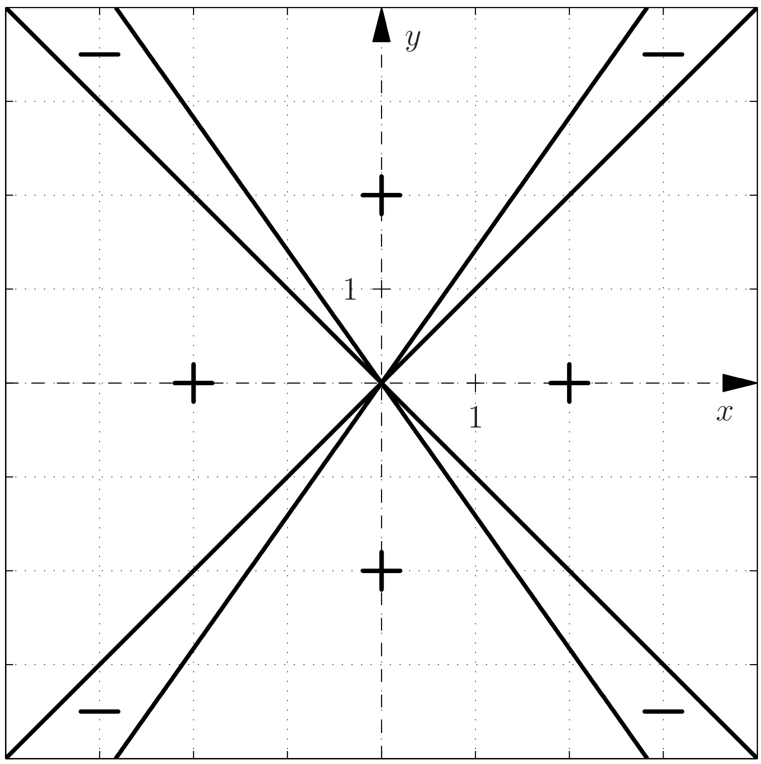
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \left(y^2 - x^2\right)\left(y^2 - 2x^2\right) .$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten von g.

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \left(\boxed{-6xy^2 + 8x^3} \, , \boxed{4y^3 - 6yx^2} \right)^\top$$

(b) Skizzieren Sie die Gebiete für die die Funktion $f(x, y) = 0$, $f(x, y) > 0$ bzw. $f(x, y) < 0$ ist.



(c) Geben Sie alle kritischen Stellen der Funktion f und deren Typ an.

Sattelpunkt an der Stelle $(0, 0)$