

Name,
Vorname: Matrikel-
Nummer: Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Summe
Punkte	/1	/3	/2	/2	/3	/4	/2	/3	/4	/2	/3	/3	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Viel Erfolg!***Aufgabe 1** (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.Name des Tutors/der Tutorin: Gruppennr.: **Aufgabe 2** (3 Punkte) Gegeben sind die folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenprodukte. Tragen Sie „nicht definiert“ in den Kasten ein, falls die Multiplikation nicht möglich ist.

$$BC = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -3 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

$$AC = \text{nicht definiert}$$

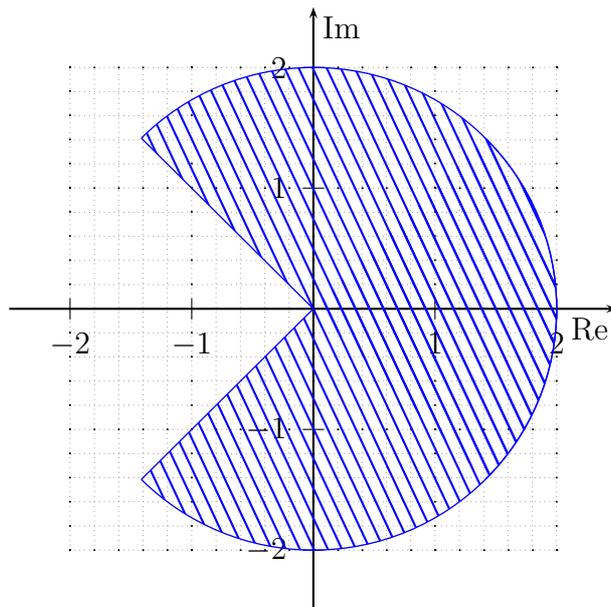
$$C^T A = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (2 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungsmenge \mathcal{L} der Ungleichung $1 \leq \frac{1}{|x| - 4}$.

$$\mathcal{L} = \boxed{[-5, -4) \cup (4, 5]}$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) Zeichnen Sie die folgende Menge M in die komplexe Ebene ein.

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2 \text{ und } \arg z \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right] \right\}$$



Aufgabe 5 (3 Punkte) Gegeben sind die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

$$|u| = \boxed{\sqrt{19}} \quad \langle u | v \rangle = \boxed{22} \quad u \times v = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Nullstellen des folgenden Polynoms. Geben Sie dabei die Nullstellen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$p(z) = z^4 - 2z^3 - z + 2$$

$$\boxed{z_1 = 2, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Ebene E und der Geraden g .

$$E: -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad g: x = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$S = \boxed{(5, -2, -7)}$$

Aufgabe 8 (3 Punkte) Berechnen Sie die Lösungsmengen folgender linearer Gleichungssysteme.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 7 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}}$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix A durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinante und die Inverse von A .

$$\det A = \boxed{-1}$$

$$A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -6 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 10 (2 Punkte) Gegeben sind die folgenden Abbildungen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie, ob die Abbildungen linear sind. Falls die Abbildung linear ist, geben Sie die Matrix der Abbildung bezüglich der Standardbasen von \mathbb{R}^3 und \mathbb{R}^2 an. Falls die Abbildung nicht linear ist, tragen Sie „nicht linear“ ein.

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x - 3y \\ y \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 2y - z \\ -5x + 3 \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{nicht linear}}$$

Aufgabe 11 (3 Punkte) Gegeben ist die folgende lineare Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto Ax \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sowie die Basis B bestehend aus

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ${}_E \text{id}_B$, ${}_B \text{id}_E$ und ${}_B f_B$.

$${}_E \text{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_B \text{id}_E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}_B f_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12 (3 Punkte) Bestimmen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind. Tragen Sie "ja" in den Kästen ein, falls die gegebene Funktion die entsprechende Eigenschaft hat. Anderenfalls tragen Sie "nein" ein.

	injektiv	surjektiv	bijektiv
$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x$	ja	ja	ja
$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} x$	nein	ja	nein
$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} x$	nein	nein	nein

Name,

Matrikel-

Studien-

Vorname:

Nummer:

gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Summe
Punkte	/1	/3	/2	/2	/3	/4	/2	/3	/4	/2	/3	/3	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (3 Punkte) Gegeben sind die folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenprodukte. Tragen Sie „nicht definiert“ in den Kasten ein, falls die Multiplikation nicht möglich ist.

 $AC =$

nicht definiert

 $BC =$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

 $C^T A =$

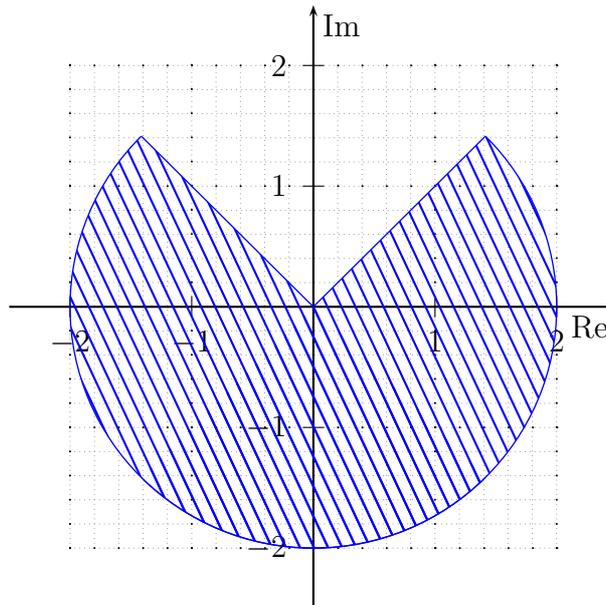
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (2 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungsmenge \mathcal{L} der Ungleichung $2 \leq \frac{1}{|x| - 3}$.

$$\mathcal{L} = \left[-\frac{7}{2}, -3 \right) \cup \left(3, \frac{7}{2} \right]$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) Zeichnen Sie die folgende Menge M in die komplexe Ebene ein.

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2 \text{ und } \arg z \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, 2\pi \right] \right\}$$



Aufgabe 5 (3 Punkte) Gegeben sind die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

$$|u| = \sqrt{17} \quad \langle u | v \rangle = 12 \quad u \times v = \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Nullstellen des folgenden Polynoms. Geben Sie dabei die Nullstellen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$p(z) = z^4 - 3z^3 + z - 3$$

$$z_1 = 3, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Aufgabe 7 (2 Punkte) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Ebene E und der Geraden g .

$$E: x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad g: x = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$S = \boxed{(5, -4, -1)}$$

Aufgabe 8 (3 Punkte) Berechnen Sie die Lösungsmengen folgender linearer Gleichungssysteme.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ -3 & -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}}$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix A durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinante und die Inverse von A .

$$\det A = \boxed{1}$$

$$A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -7 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ -8 & 2 & -3 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 10 (2 Punkte) Gegeben sind die folgenden Abbildungen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie, ob die Abbildungen linear sind. Falls die Abbildung linear ist, geben Sie die Matrix der Abbildung bezüglich der Standardbasen von \mathbb{R}^3 und \mathbb{R}^2 an. Falls die Abbildung nicht linear ist, tragen Sie „nicht linear“ ein.

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x - 3y \\ y + 3 \\ 2x + y \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{nicht linear}}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x - 3y + 2z \\ -2x - z \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 11 (3 Punkte) Gegeben ist die folgende lineare Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto Ax \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sowie die Basis B bestehend aus

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ${}_E \text{id}_B$, ${}_B \text{id}_E$ und ${}_B f_B$.

$${}_E \text{id}_B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}_B \text{id}_E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$${}_B f_B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12 (3 Punkte) Bestimmen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind. Tragen Sie "ja" in den Kästen ein, falls die gegebene Funktion die entsprechende Eigenschaft hat. Anderenfalls tragen Sie "nein" ein.

	injektiv	surjektiv	bijektiv
$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} x$	nein	nein	nein
$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x$	ja	ja	ja
$h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} x$	nein	ja	nein

Name,
Vorname: Matrikel-
Nummer: Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Summe
Punkte	/1	/3	/2	/2	/3	/4	/2	/3	/4	/2	/3	/3	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Viel Erfolg!***Aufgabe 1** (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.Name des Tutors/der Tutorin: Gruppennr.: **Aufgabe 2** (3 Punkte) Gegeben sind die folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenprodukte. Tragen Sie „nicht definiert“ in den Kasten ein, falls die Multiplikation nicht möglich ist.

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AC = \text{nicht definiert}$$

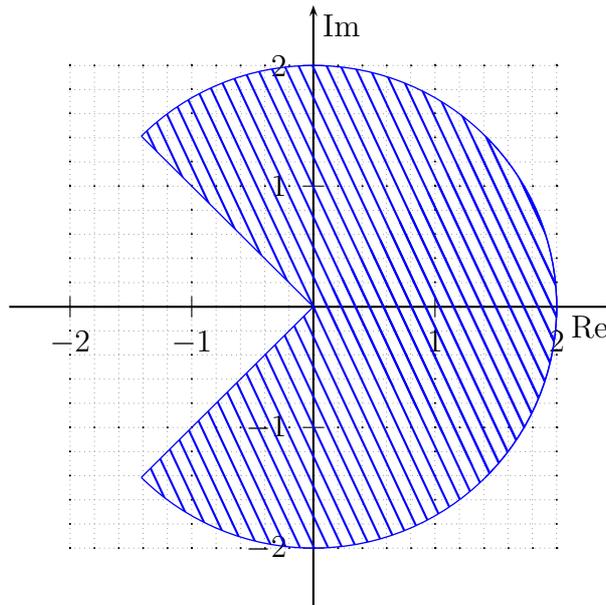
$$C^T A = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (2 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungsmenge \mathcal{L} der Ungleichung $3 \leq \frac{1}{|x| - 2}$.

$$\mathcal{L} = \left[-\frac{7}{3}, -2 \right) \cup \left(2, \frac{7}{3} \right]$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) Zeichnen Sie die folgende Menge M in die komplexe Ebene ein.

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2 \text{ und } \arg z \in \left[0, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi \right] \right\}$$



Aufgabe 5 (3 Punkte) Gegeben sind die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

$$|v| = \sqrt{14} \quad \langle u | v \rangle = -17 \quad u \times v = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Nullstellen des folgenden Polynoms. Geben Sie dabei die Nullstellen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$p(z) = z^4 + 2z^3 - z - 2$$

$$z_1 = -2, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Aufgabe 7 (2 Punkte) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Ebene E und der Geraden g .

$$E: 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad g: x = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$S = \boxed{(2, -3, -3)}$$

Aufgabe 8 (3 Punkte) Berechnen Sie die Lösungsmengen folgender linearer Gleichungssysteme.

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}}$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix A durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinante und die Inverse von A .

$$\det A = \boxed{-1}$$

$$A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -7 & -4 & -6 \\ 4 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 10 (2 Punkte) Gegeben sind die folgenden Abbildungen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie, ob die Abbildungen linear sind. Falls die Abbildung linear ist, geben Sie die Matrix der Abbildung bezüglich der Standardbasen von \mathbb{R}^3 und \mathbb{R}^2 an. Falls die Abbildung nicht linear ist, tragen Sie „nicht linear“ ein.

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x + y \\ -5x - y \\ -4x - 4y \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -5 & -1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x + 2 + 4z \\ 3y + 3z \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{nicht linear}}$$

Aufgabe 11 (3 Punkte) Gegeben ist die folgende lineare Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto Ax \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sowie die Basis B bestehend aus

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ${}_E \text{id}_B$, ${}_B \text{id}_E$ und ${}_B f_B$.

$${}_E \text{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}_B \text{id}_E = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_B f_B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12 (3 Punkte) Bestimmen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind. Tragen Sie "ja" in den Kästen ein, falls die gegebene Funktion die entsprechende Eigenschaft hat. Anderenfalls tragen Sie "nein" ein.

	injektiv	surjektiv	bijektiv
$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} x$	nein	ja	nein
$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} x$	nein	nein	nein
$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$	ja	ja	ja

Name,

Matrikel-

Studien-

Vorname:

Nummer:

gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Summe
Punkte	/1	/3	/2	/2	/3	/4	/2	/3	/4	/2	/3	/3	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (3 Punkte) Gegeben sind die folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenprodukte. Tragen Sie „nicht definiert“ in den Kasten ein, falls die Multiplikation nicht möglich ist.

 $AC =$

nicht definiert

 $BC =$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

 $C^T A =$

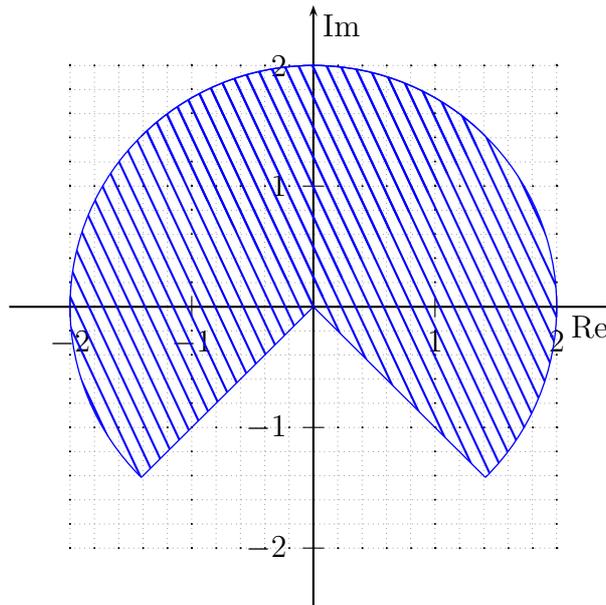
$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (2 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungsmenge \mathcal{L} der Ungleichung $4 \leq \frac{1}{|x-1|}$.

$$\mathcal{L} = \left[-\frac{5}{4}, -1 \right) \cup \left(1, \frac{5}{4} \right]$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) Zeichnen Sie die folgende Menge M in die komplexe Ebene ein.

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2 \text{ und } \arg z \in \left[0, \frac{5\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi \right] \right\}$$



Aufgabe 5 (3 Punkte) Gegeben sind die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

$$|v| = \sqrt{14} \quad \langle u | v \rangle = -21 \quad u \times v = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Nullstellen des folgenden Polynoms. Geben Sie dabei die Nullstellen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$p(z) = z^4 + 3z^3 + z + 3$$

$$z_1 = -3, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Aufgabe 7 (2 Punkte) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Ebene E und der Geraden g .

$$E: -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \quad g: x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$S = \boxed{(-3, -4, -1)}$$

Aufgabe 8 (3 Punkte) Berechnen Sie die Lösungsmengen folgender linearer Gleichungssysteme.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 & 3 & -5 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}}$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix A durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinante und die Inverse von A .

$$\det A = \boxed{1}$$

$$A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 10 (2 Punkte) Gegeben sind die folgenden Abbildungen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie, ob die Abbildungen linear sind. Falls die Abbildung linear ist, geben Sie die Matrix der Abbildung bezüglich der Standardbasen von \mathbb{R}^3 und \mathbb{R}^2 an. Falls die Abbildung nicht linear ist, tragen Sie „nicht linear“ ein.

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4x - 4y \\ 5 + y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{nicht linear}}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x + z \\ 2x + 5y - 2z \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 11 (3 Punkte) Gegeben ist die folgende lineare Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto Ax \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sowie die Basis B bestehend aus

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ${}_E \text{id}_B$, ${}_B \text{id}_E$ und ${}_B f_B$.

$${}_E \text{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_B \text{id}_E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}_B f_B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12 (3 Punkte) Bestimmen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind. Tragen Sie "ja" in den Kästen ein, falls die gegebene Funktion die entsprechende Eigenschaft hat. Anderenfalls tragen Sie "nein" ein.

	injektiv	surjektiv	bijektiv
$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} x$	nein	nein	nein
$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} x$	nein	ja	nein
$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x$	ja	ja	ja