

Name,

Vorname:

Matrikel-

Nummer:

Studien-

gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/4	/4	/3	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (4 Punkte) Konstruieren Sie zu den Vektoren

$$v_1 = (1, 0, 1)^\top,$$

$$v_2 = (2, -1, 0)^\top,$$

$$v_3 = (1, 3, 1)^\top$$

eine Orthonormalbasis $F: f_1, f_2, f_3$ von \mathbb{R}^3 mit $L(v_1) = L(f_1)$, $L(v_1, v_2) = L(f_1, f_2)$ und $L(v_1, v_2, v_3) = L(f_1, f_2, f_3)$.

 $f_1 =$

 $f_2 =$

 $f_3 =$

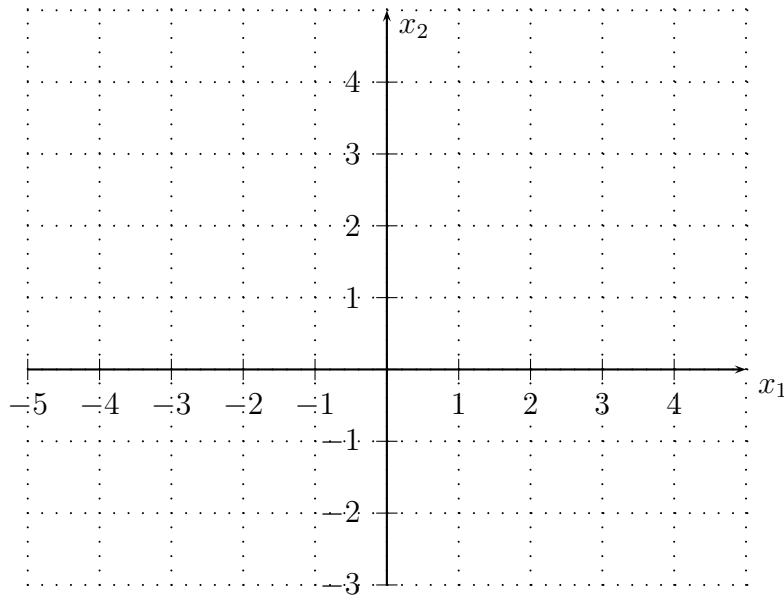
Aufgabe 3 (4 Punkte) Gegeben sind die folgenden Punkte

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Weiter sind die Dreiecksflächen D_1 und D_2 gegeben durch

$$D_i = \left\{ \lambda_1 A^i + \lambda_2 B^i + \lambda_3 C^i \mid \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \text{ und } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Zeichnen Sie die Mengen D_1 und D_2 in das folgende Schaubild ein.



Es sei $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Bewegung, die D_1 in D_2 überführt, d.h. $\alpha(D_1) = D_2$. Bestimmen Sie

$$\alpha(A^1) = \boxed{}, \quad \alpha(B^1) = \boxed{}, \quad \alpha(C^1) = \boxed{}.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen lineare Abbildungen, affine Abbildungen, Bewegungen und/oder eigentliche Bewegungen sind. Tragen Sie “ja” ein, falls die Funktion die gewünschte Eigenschaft hat; “nein”, falls nicht.

	linear	affin	Bewegung	eigentlich
$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} v$				
$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y+5) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x+2) \end{pmatrix}$				
$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^T \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} x$				

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alle komplexen Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{}, \quad \lambda_2 = \boxed{}, \quad \lambda_3 = \boxed{}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass gilt $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{} \qquad D = \boxed{}$$

Aufgabe 9 (3 Punkte) Gegeben sind die Quadriken

$$Q_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_1x_2 + 2x_2 - 5 = 0 \right\} \quad \text{und}$$

$$Q_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 6x_1 + 4x_2 + 3 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie jeweils den Rang der symmetrischen Matrix A , die den quadratischen Teil beschreibt und den Rang der erweiterten Matrix A_{erw} . Entscheiden Sie, ob es sich um eine Mittelpunktsquadratik, eine parabolische Quadratik oder eine kegelige Quadratik handelt und tragen Sie Ihre Entscheidung in die Spalte "Typ" ein.

	Rg A	Rg A_{erw}	Typ
Q_1			
Q_2			

Name,
Vorname:Matrikel-
Nummer:Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/4	/4	/3	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (4 Punkte) Konstruieren Sie zu den Vektoren

$$v_1 = (1, -1, 0)^\top,$$

$$v_2 = (2, 0, 1)^\top,$$

$$v_3 = (3, 1, -1)^\top$$

eine Orthonormalbasis $F: f_1, f_2, f_3$ von \mathbb{R}^3 mit $L(v_1) = L(f_1)$, $L(v_1, v_2) = L(f_1, f_2)$ und $L(v_1, v_2, v_3) = L(f_1, f_2, f_3)$.

 $f_1 =$ $f_2 =$ $f_3 =$

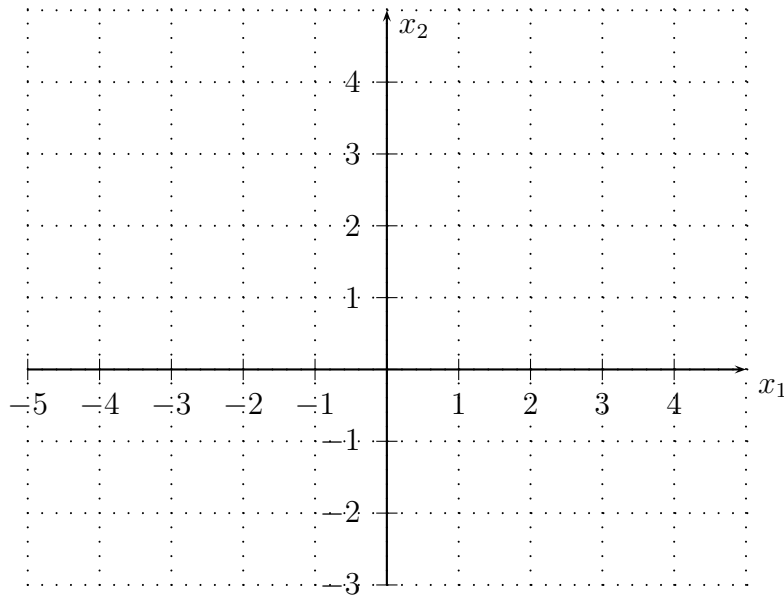
Aufgabe 3 (4 Punkte) Gegeben sind die folgenden Punkte

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Weiter sind die Dreiecksflächen D_1 und D_2 gegeben durch

$$D_i = \left\{ \lambda_1 A^i + \lambda_2 B^i + \lambda_3 C^i \mid \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \text{ und } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Zeichnen Sie die Mengen D_1 und D_2 in das folgende Schaubild ein.



Es sei $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Bewegung, die D_1 in D_2 überführt, d.h. $\alpha(D_1) = D_2$. Bestimmen Sie

$$\alpha(A^1) = \boxed{}, \quad \alpha(B^1) = \boxed{}, \quad \alpha(C^1) = \boxed{}.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen lineare Abbildungen, affine Abbildungen, Bewegungen und/oder eigentliche Bewegungen sind. Tragen Sie “ja” ein, falls die Funktion die gewünschte Eigenschaft hat; “nein”, falls nicht.

	linear	affin	Bewegung	eigentlich
$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(-y + x + 3) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y + 4) \end{pmatrix}$				
$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} v$				
$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto x^\top \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} x$				

Aufgabe 5 (4 Punkte) Gegeben ist die Drehung

$$\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} x.$$

Bestimmen Sie einen normierten Vektor v , der die Drehachse aufspannt, sowie den Drehwinkel φ .

$v =$ $\varphi =$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Gegeben sind die Punkte $P = (4, 2)$ und $Q = (3, 2)$ sowie die Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left(P; \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathbb{G} = \left(Q; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation, welche von \mathbb{F} -Koordinaten auf Standardkoordinaten \mathbb{E} umrechnet, sowie die Koordinatentransformation von \mathbb{E} auf \mathbb{G} .

$\mathbb{E} \kappa_{\mathbb{F}}(v) =$ $v +$ $\mathbb{G} \kappa_{\mathbb{E}}(v) =$ $v +$

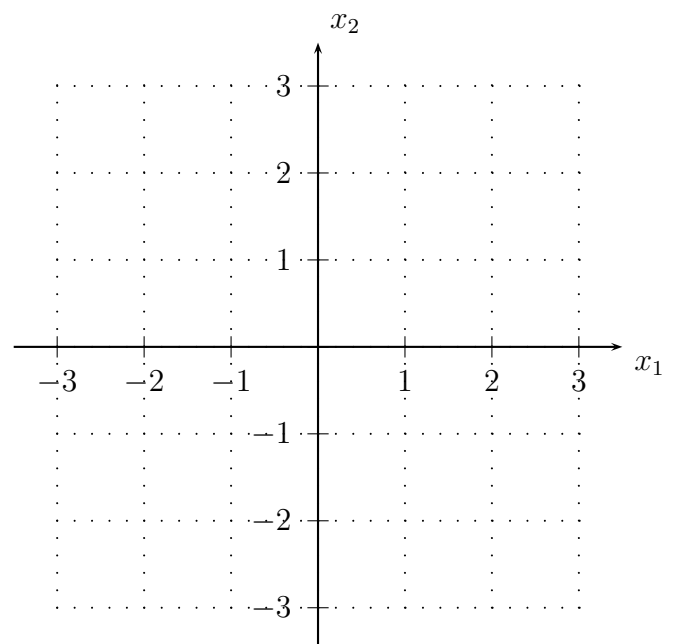
Aufgabe 7 (3 Punkte)

Gegeben seien die Quadrik Q und die affine Abbildung α durch

$$Q := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 0 \right\},$$

$$\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie die Quadrik $\alpha(Q)$.



Aufgabe 8 (5 Punkte)

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alle komplexen Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{}, \quad \lambda_2 = \boxed{}, \quad \lambda_3 = \boxed{}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass gilt $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{} \qquad D = \boxed{}$$

Aufgabe 9 (3 Punkte) Gegeben sind die Quadriken

$$Q_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid -3x_1^2 - 3x_2^2 - 6x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2 + 5 = 0 \right\} \quad \text{und}$$

$$Q_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_2 + 7 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie jeweils den Rang der symmetrischen Matrix A , die den quadratischen Teil beschreibt und den Rang der erweiterten Matrix A_{erw} . Entscheiden Sie, ob es sich um eine Mittelpunktsquadratik, eine parabolische Quadratik oder eine kegelige Quadratik handelt und tragen Sie Ihre Entscheidung in die Spalte "Typ" ein.

	Rg A	Rg A_{erw}	Typ
Q_1			
Q_2			

Name,
Vorname: Matrikel-
Nummer: Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/4	/4	/3	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Viel Erfolg!***Aufgabe 1** (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.Name des Tutors/der Tutorin: Gruppennr.: **Aufgabe 2** (4 Punkte) Konstruieren Sie zu den Vektoren

$$v_1 = (0, 1, 1)^\top,$$

$$v_2 = (1, 0, -2)^\top,$$

$$v_3 = (-1, 1, -3)^\top$$

eine Orthonormalbasis $F: f_1, f_2, f_3$ von \mathbb{R}^3 mit $L(v_1) = L(f_1)$, $L(v_1, v_2) = L(f_1, f_2)$ und $L(v_1, v_2, v_3) = L(f_1, f_2, f_3)$. $f_1 =$ $f_2 =$ $f_3 =$

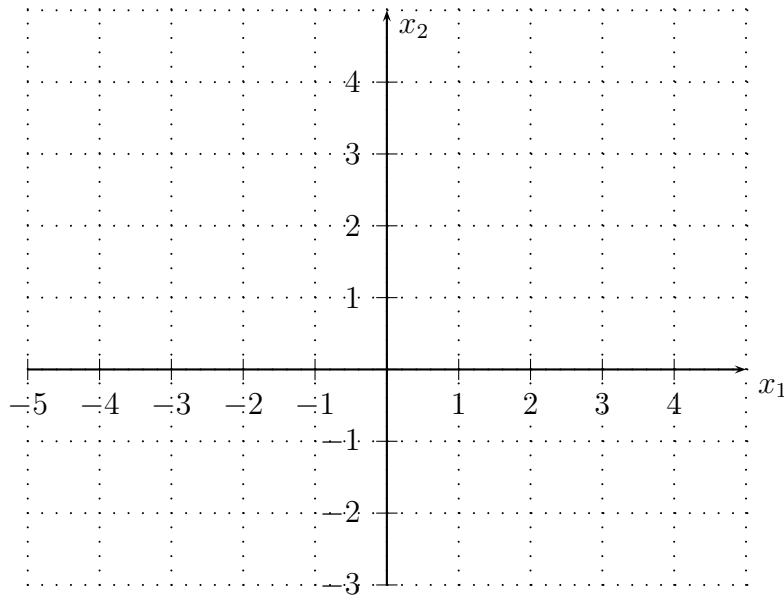
Aufgabe 3 (4 Punkte) Gegeben sind die folgenden Punkte

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Weiter sind die Dreiecksflächen D_1 und D_2 gegeben durch

$$D_i = \left\{ \lambda_1 A^i + \lambda_2 B^i + \lambda_3 C^i \mid \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \text{ und } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Zeichnen Sie die Mengen D_1 und D_2 in das folgende Schaubild ein.



Es sei $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Bewegung, die D_1 in D_2 überführt, d.h. $\alpha(D_1) = D_2$. Bestimmen Sie

$$\alpha(A^1) = \boxed{}, \quad \alpha(B^1) = \boxed{}, \quad \alpha(C^1) = \boxed{}.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen lineare Abbildungen, affine Abbildungen, Bewegungen und/oder eigentliche Bewegungen sind. Tragen Sie “ja” ein, falls die Funktion die gewünschte Eigenschaft hat; “nein”, falls nicht.

	linear	affin	Bewegung	eigentlich
$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x+1) \end{pmatrix}$				
$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^\top \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} x$				
$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} v$				

Aufgabe 5 (4 Punkte) Gegeben ist die Drehung

$$\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & \sqrt{6} \\ -1 & 3 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} x.$$

Bestimmen Sie einen normierten Vektor v , der die Drehachse aufspannt, sowie den Drehwinkel φ .

$v =$ $\varphi =$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Gegeben sind die Punkte $P = (1, 3)$ und $Q = (-5, 2)$ sowie die Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left(P; \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathbb{G} = \left(Q; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation, welche von \mathbb{F} -Koordinaten auf Standardkoordinaten \mathbb{E} umrechnet, sowie die Koordinatentransformation von \mathbb{E} auf \mathbb{G} .

${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) =$ $v +$ ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) =$ $v +$

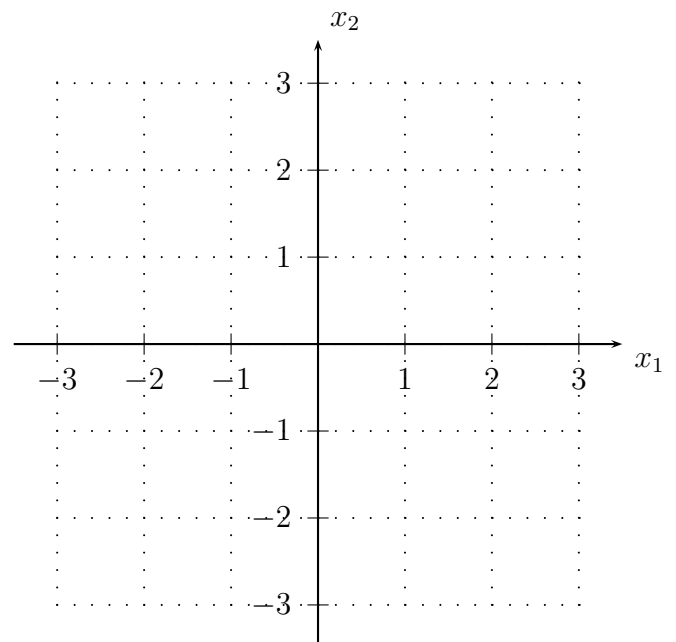
Aufgabe 7 (3 Punkte)

Gegeben seien die Quadrik Q und die affine Abbildung α durch

$$Q := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 0 \right\},$$

$$\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie die Quadrik $\alpha(Q)$.



Aufgabe 8 (5 Punkte)

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alle komplexen Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{}, \quad \lambda_2 = \boxed{}, \quad \lambda_3 = \boxed{}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass gilt $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{} \quad D = \boxed{}$$

Aufgabe 9 (3 Punkte) Gegeben sind die Quadriken

$$Q_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 4x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_1x_2 + 2x_1 - 3 = 0 \right\} \quad \text{und}$$

$$Q_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1^2 - 4x_2^2 + 6x_1x_2 - 2x_1 + 6x_2 - 1 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie jeweils den Rang der symmetrischen Matrix A , die den quadratischen Teil beschreibt und den Rang der erweiterten Matrix A_{erw} . Entscheiden Sie, ob es sich um eine Mittelpunktsquadratik, eine parabolische Quadratik oder eine kegelige Quadratik handelt und tragen Sie Ihre Entscheidung in die Spalte "Typ" ein.

	Rg A	Rg A_{erw}	Typ
Q_1			
Q_2			

Name,
Vorname:Matrikel-
Nummer:Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/4	/4	/3	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (4 Punkte) Konstruieren Sie zu den Vektoren

$$v_1 = (1, 0, -1)^\top,$$

$$v_2 = (-2, 1, 0)^\top,$$

$$v_3 = (1, -3, -1)^\top$$

eine Orthonormalbasis $F: f_1, f_2, f_3$ von \mathbb{R}^3 mit $L(v_1) = L(f_1)$, $L(v_1, v_2) = L(f_1, f_2)$ und $L(v_1, v_2, v_3) = L(f_1, f_2, f_3)$.

 $f_1 =$ $f_2 =$ $f_3 =$

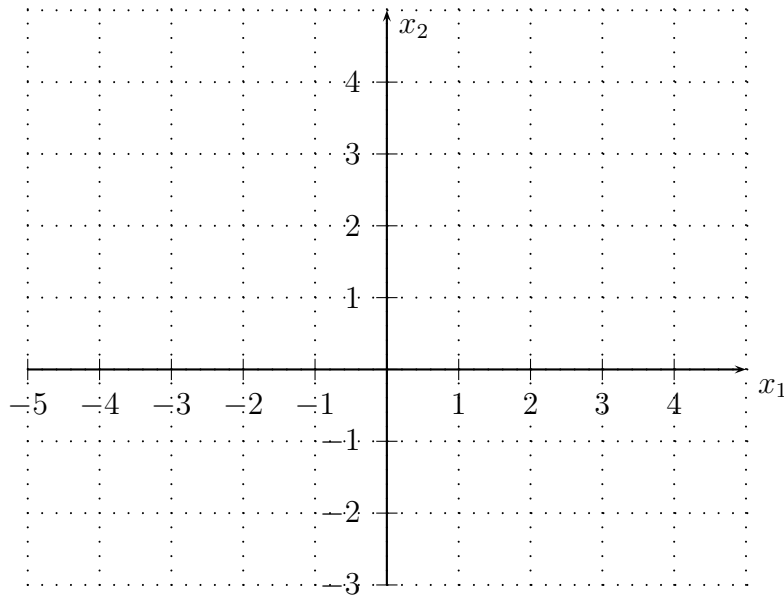
Aufgabe 3 (4 Punkte) Gegeben sind die folgenden Punkte

$$A^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter sind die Dreiecksflächen D_1 und D_2 gegeben durch

$$D_i = \left\{ \lambda_1 A^i + \lambda_2 B^i + \lambda_3 C^i \mid \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \text{ und } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Zeichnen Sie die Mengen D_1 und D_2 in das folgende Schaubild ein.



Es sei $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Bewegung, die D_1 in D_2 überführt, d.h. $\alpha(D_1) = D_2$. Bestimmen Sie

$$\alpha(A^1) = \boxed{}, \quad \alpha(B^1) = \boxed{}, \quad \alpha(C^1) = \boxed{}.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen lineare Abbildungen, affine Abbildungen, Bewegungen und/oder eigentliche Bewegungen sind. Tragen Sie “ja” ein, falls die Funktion die gewünschte Eigenschaft hat; “nein”, falls nicht.

	linear	affin	Bewegung	eigentlich
$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto x^T \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} x$				
$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} v$				
$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(-y + x + 1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \end{pmatrix}$				

Aufgabe 5 (4 Punkte) Gegeben ist die Drehung

$$\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Bestimmen Sie einen normierten Vektor v , der die Drehachse aufspannt, sowie den Drehwinkel φ .

$v =$ $\varphi =$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Gegeben sind die Punkte $P = (-5, 4)$ und $Q = (-2, 3)$ sowie die Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left(P; \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathbb{G} = \left(Q; \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation, welche von \mathbb{F} -Koordinaten auf Standardkoordinaten \mathbb{E} umrechnet, sowie die Koordinatentransformation von \mathbb{E} auf \mathbb{G} .

$\mathbb{E} \xrightarrow{\kappa_{\mathbb{F}}} (v) =$ $v +$ $\mathbb{G} \xrightarrow{\kappa_{\mathbb{E}}} (v) =$ $v +$

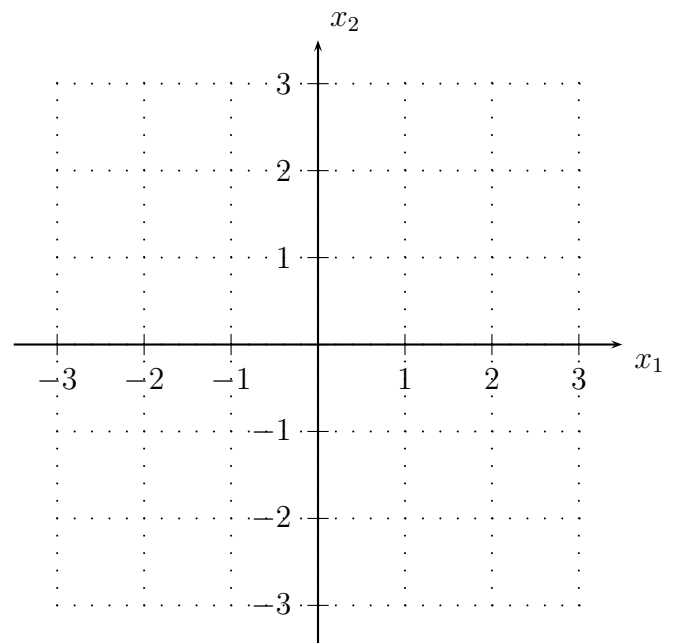
Aufgabe 7 (3 Punkte)

Gegeben seien die Quadrik Q und die affine Abbildung α durch

$$Q := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 0 \right\},$$

$$\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie die Quadrik $\alpha(Q)$.



Aufgabe 8 (5 Punkte)

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alle komplexen Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{}, \quad \lambda_2 = \boxed{}, \quad \lambda_3 = \boxed{}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass gilt $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{} \qquad D = \boxed{}$$

Aufgabe 9 (3 Punkte) Gegeben sind die Quadriken

$$Q_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid -4x_1^2 - 4x_2^2 - 8x_1x_2 - 8x_1 - 8x_2 - 5 = 0 \right\} \quad \text{und}$$

$$Q_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 5x_1^2 + 4x_2^2 - 6x_1x_2 + 6x_1 + 2 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie jeweils den Rang der symmetrischen Matrix A , die den quadratischen Teil beschreibt und den Rang der erweiterten Matrix A_{erw} . Entscheiden Sie, ob es sich um eine Mittelpunktsquadratik, eine parabolische Quadratik oder eine kegelige Quadratik handelt und tragen Sie Ihre Entscheidung in die Spalte "Typ" ein.

	Rg A	Rg A_{erw}	Typ
Q_1			
Q_2			