Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/4	/4	/3	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Konstruieren Sie zu den Vektoren

$$v_1 = (1,0,1)^\intercal, \qquad v_2 = (2,-1,0)^\intercal, \qquad v_3 = (1,3,1)^\intercal$$

eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3$ von $\mathbb{R}^3$ mit $L(v_1) = L(f_1)$, $L(v_1, v_2) = L(f_1, f_2)$ und $L(v_1, v_2, v_3) = L(f_1, f_2, f_3)$.

$$f_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}} \qquad f_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}} \qquad f_3 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}}$$

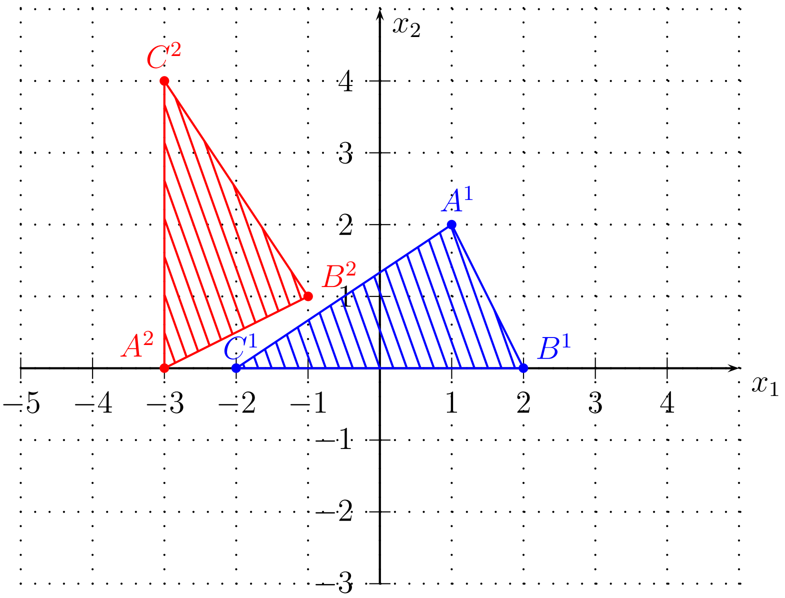
Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die folgenden Punkte

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Weiter sind die Dreiecksflächen D_1 und D_2 gegeben durch

$$D_i = \left\{ \lambda_1 A^i + \lambda_2 B^i + \lambda_3 C^i \;\middle|\; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \text{ und } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geqq 0 \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Zeichnen Sie die Mengen D_1 und D_2 in das folgende Schaubild ein.



Es sei $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung, die D_1 in D_2 überführt, d.h. $\alpha(D_1) = D_2$. Bestimmen Sie

$$\alpha\left(A^1\right) = \boxed{B^2}, \quad \alpha\left(B^1\right) = \boxed{A^2}, \quad \alpha\left(C^1\right) = \boxed{C^2}.$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen lineare Abbildungen, affine Abbildungen, Bewegungen und/oder eigentliche Bewegungen sind. Tragen Sie "ja" ein, falls die Funktion die gewünschte Eigenschaft hat; "nein", falls nicht.

	linear	affin	Bewegung	eigentlich
$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} v$	ja	ja	nein	nein
$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y+5) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x+2) \end{pmatrix}$	nein	ja	ja	ja
$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x^\intercal \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} x$	nein	nein	nein	nein

---

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Drehung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 3 & -1 \\ -\sqrt{6} & -1 & 3 \end{pmatrix} x \,.$$

Bestimmen Sie einen normierten Vektor v, der die Drehachse aufspannt, sowie den Drehwinkel φ.

$$v = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \qquad \varphi = \boxed{\frac{1}{3}\pi}$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Punkte $P = (3,1)$ und $Q = (-4,0)$ sowie die Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left(P;\ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{G} = \left(Q;\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation, welche von $\mathbb{F}$-Koordinaten auf Standardkoordinaten $\mathbb{E}$ umrechnet, sowie die Koordinatentransformation von $\mathbb{E}$ auf $\mathbb{G}$.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}}\, v + \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}}\, v + \boxed{\begin{pmatrix} -4/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}}$$

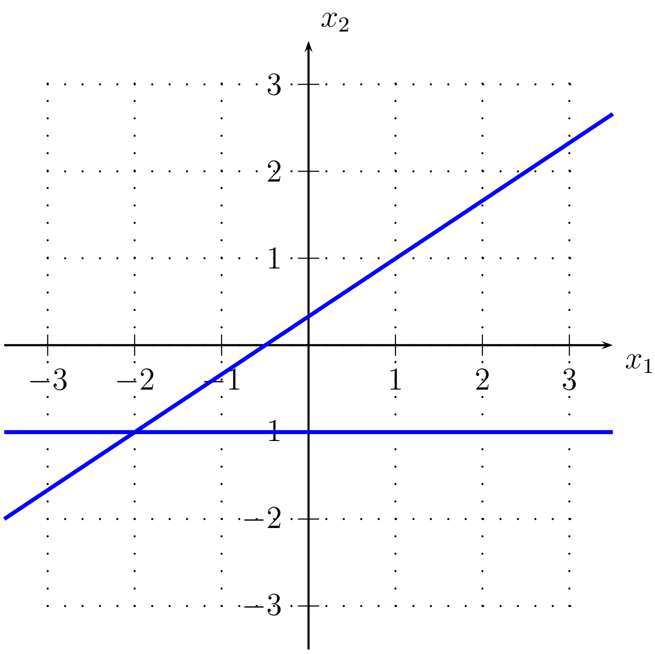
Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Gegeben seien die Quadrik Q und die affine Abbildung α durch

$$Q := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 - x_2^2 = 0 \right\},$$

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie die Quadrik $\alpha(Q)$.



Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alle komplexen Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{1}, \quad \lambda_2 = \boxed{2i}, \quad \lambda_3 = \boxed{-2i}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass gilt $D = T^{-1} A\, T$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & i & -i \\ 5 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben sind die Quadriken

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_1x_2 + 2x_2 - 5 = 0 \right\} \quad \text{und} \\ Q_2 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 6x_1 + 4x_2 + 3 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie jeweils den Rang der symmetrischen Matrix A, die den quadratischen Teil beschreibt und den Rang der erweiterten Matrix A_{erw}. Entscheiden Sie, ob es sich um eine Mittelpunktsquadrik, eine parabolische Quadrik oder eine kegelige Quadrik handelt und tragen Sie Ihre Entscheidung in die Spalte "Typ" ein.

	Rg A	Rg A_{erw}	Typ
Q_1	1	3	Parabolische Quadrik
Q_2	2	2	kegelige Quadrik

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/4	/4	/3	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Gruppennr.:** ☐

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Konstruieren Sie zu den Vektoren

$$v_1 = (1, -1, 0)^\intercal, \qquad v_2 = (2, 0, 1)^\intercal, \qquad v_3 = (3, 1, -1)^\intercal$$

eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3$ von $\mathbb{R}^3$ mit $L(v_1) = L(f_1)$, $L(v_1, v_2) = L(f_1, f_2)$ und $L(v_1, v_2, v_3) = L(f_1, f_2, f_3)$.

$$f_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad f_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad f_3 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

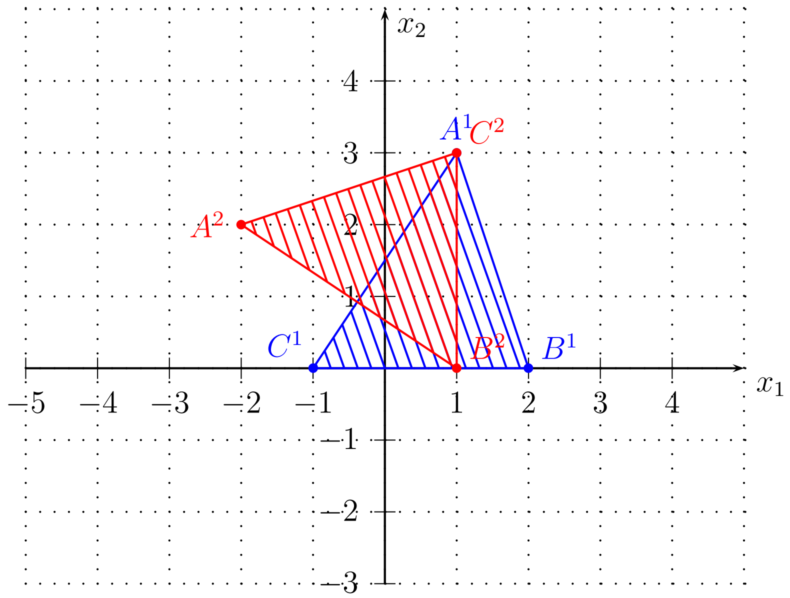
Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die folgenden Punkte

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Weiter sind die Dreiecksflächen D_1 und D_2 gegeben durch

$$D_i = \left\{ \lambda_1 A^i + \lambda_2 B^i + \lambda_3 C^i \;\middle|\; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \text{ und } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geqq 0 \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Zeichnen Sie die Mengen D_1 und D_2 in das folgende Schaubild ein.



Es sei $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung, die D_1 in D_2 überführt, d.h. $\alpha(D_1) = D_2$. Bestimmen Sie

$$\alpha(A^1) = \boxed{A^2}, \quad \alpha(B^1) = \boxed{C^2}, \quad \alpha(C^1) = \boxed{B^2}.$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen lineare Abbildungen, affine Abbildungen, Bewegungen und/oder eigentliche Bewegungen sind. Tragen Sie "ja" ein, falls die Funktion die gewünschte Eigenschaft hat; "nein", falls nicht.

	linear	affin	Bewegung	eigentlich
$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(-y + x + 3) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y + 4) \end{pmatrix}$	nein	ja	ja	ja
$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} v$	ja	ja	nein	nein
$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^\mathsf{T} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} x$	nein	nein	nein	nein

---

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Drehung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} x \,.$$

Bestimmen Sie einen normierten Vektor v, der die Drehachse aufspannt, sowie den Drehwinkel φ.

$$v = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad \varphi = \boxed{\frac{1}{2}\pi}$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Punkte $P = (4, 2)$ und $Q = (3, 2)$ sowie die Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left(P; \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{G} = \left(Q; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation, welche von $\mathbb{F}$-Koordinaten auf Standardkoordinaten $\mathbb{E}$ umrechnet, sowie die Koordinatentransformation von $\mathbb{E}$ auf $\mathbb{G}$.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}} v + \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}} v + \boxed{\begin{pmatrix} -5 \\ -7/3 \end{pmatrix}}$$

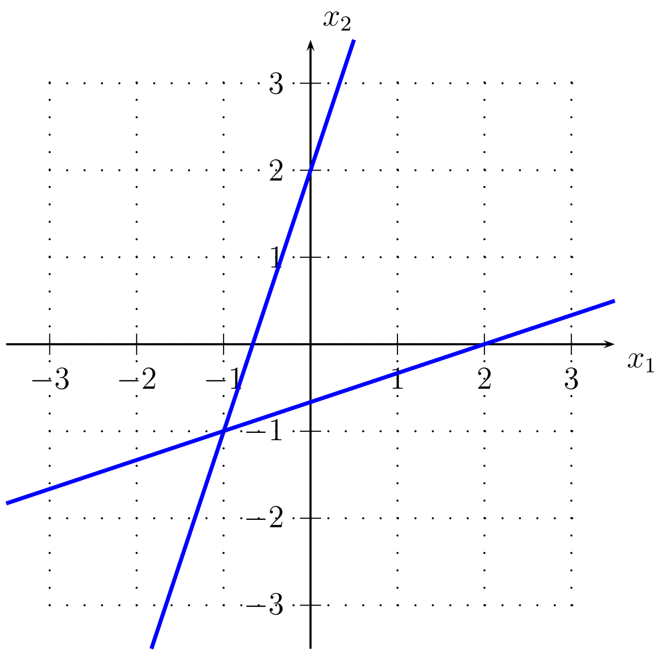
Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Gegeben seien die Quadrik Q und die affine Abbildung α durch

$$Q := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 - x_2^2 = 0 \right\},$$

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie die Quadrik $\alpha(Q)$.



Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alle komplexen Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{1}, \quad \lambda_2 = \boxed{3i}, \quad \lambda_3 = \boxed{-3i}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass gilt $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -i & i \\ -5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & -3i \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben sind die Quadriken

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -3x_1^2 - 3x_2^2 - 6x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2 + 5 = 0 \right\} \quad \text{und} \\ Q_2 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_2 + 7 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie jeweils den Rang der symmetrischen Matrix A, die den quadratischen Teil beschreibt und den Rang der erweiterten Matrix A_{erw}. Entscheiden Sie, ob es sich um eine Mittelpunktsquadrik, eine parabolische Quadrik oder eine kegelige Quadrik handelt und tragen Sie Ihre Entscheidung in die Spalte "Typ" ein.

	Rg A	Rg A_{erw}	Typ
Q_1	1	2	Mittelpunktsquadrik
Q_2	2	3	Mittelpunktsquadrik

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/4	/4	/3	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Konstruieren Sie zu den Vektoren

$$v_1 = (0,1,1)^\intercal, \qquad v_2 = (1,0,-2)^\intercal, \qquad v_3 = (-1,1,-3)^\intercal$$

eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3$ von $\mathbb{R}^3$ mit $L(v_1) = L(f_1)$, $L(v_1, v_2) = L(f_1, f_2)$ und $L(v_1, v_2, v_3) = L(f_1, f_2, f_3)$.

$$f_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}} \qquad f_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}} \qquad f_3 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}}$$

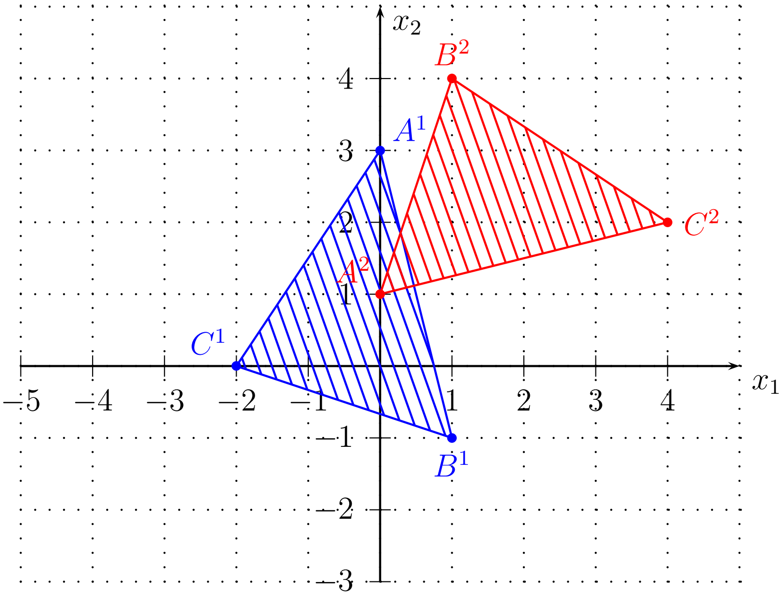
Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die folgenden Punkte

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Weiter sind die Dreiecksflächen D_1 und D_2 gegeben durch

$$D_i = \left\{ \lambda_1 A^i + \lambda_2 B^i + \lambda_3 C^i \;\middle|\; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \text{ und } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geqq 0 \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Zeichnen Sie die Mengen D_1 und D_2 in das folgende Schaubild ein.



Es sei $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung, die D_1 in D_2 überführt, d.h. $\alpha(D_1) = D_2$. Bestimmen Sie

$$\alpha\left(A^1\right) = \boxed{C^2}, \quad \alpha\left(B^1\right) = \boxed{A^2}, \quad \alpha\left(C^1\right) = \boxed{B^2}.$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen lineare Abbildungen, affine Abbildungen, Bewegungen und/oder eigentliche Bewegungen sind. Tragen Sie "ja" ein, falls die Funktion die gewünschte Eigenschaft hat; "nein", falls nicht.

	linear	affin	Bewegung	eigentlich
$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x+1) \end{pmatrix}$	nein	ja	ja	ja
$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^\mathsf{T} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} x$	nein	nein	nein	nein
$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} v$	ja	ja	nein	nein

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Drehung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & \sqrt{6} \\ -1 & 3 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} x\,.$$

Bestimmen Sie einen normierten Vektor v, der die Drehachse aufspannt, sowie den Drehwinkel φ.

$$v = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad \varphi = \boxed{\frac{1}{3}\pi}$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Punkte $P = (1,3)$ und $Q = (-5,2)$ sowie die Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left(P; \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{G} = \left(Q; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation, welche von $\mathbb{F}$-Koordinaten auf Standardkoordinaten $\mathbb{E}$ umrechnet, sowie die Koordinatentransformation von $\mathbb{E}$ auf $\mathbb{G}$.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}\, v + \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}\, v + \boxed{\begin{pmatrix} -2/3 \\ -5 \end{pmatrix}}$$

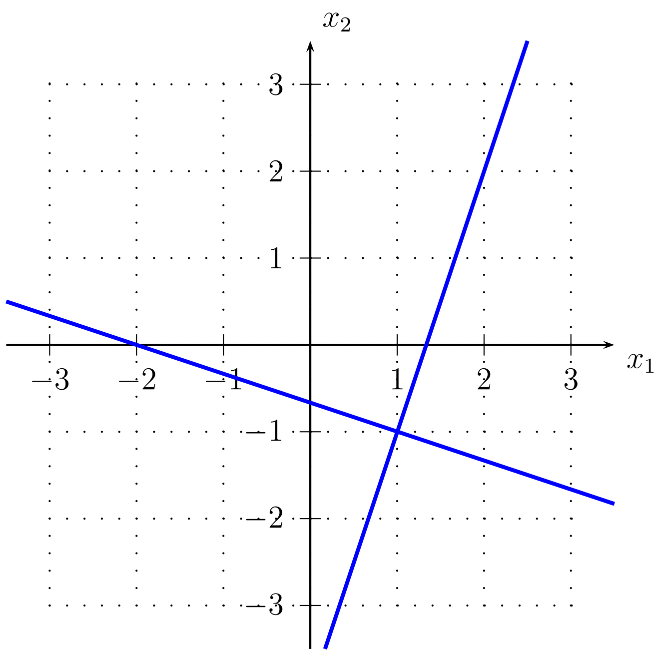
Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Gegeben seien die Quadrik Q und die affine Abbildung α durch

$$Q := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 - x_2^2 = 0\right\},$$

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie die Quadrik $\alpha(Q)$.



Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alle komplexen Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{-1}, \quad \lambda_2 = \boxed{2i}, \quad \lambda_3 = \boxed{-2i}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass gilt $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -i & i \\ -5 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben sind die Quadriken

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_1x_2 + 2x_1 - 3 = 0 \right\} \quad \text{und} \\ Q_2 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -x_1^2 - 4x_2^2 + 6x_1x_2 - 2x_1 + 6x_2 - 1 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie jeweils den Rang der symmetrischen Matrix A, die den quadratischen Teil beschreibt und den Rang der erweiterten Matrix A_{erw}. Entscheiden Sie, ob es sich um eine Mittelpunktsquadrik, eine parabolische Quadrik oder eine kegelige Quadrik handelt und tragen Sie Ihre Entscheidung in die Spalte "Typ" ein.

	Rg A	Rg A_{erw}	Typ
Q_1	1	3	Parabolische Quadrik
Q_2	2	2	kegelige Quadrik

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/4	/4	/3	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Konstruieren Sie zu den Vektoren

$$v_1 = (1, 0, -1)^\intercal, \qquad v_2 = (-2, 1, 0)^\intercal, \qquad v_3 = (1, -3, -1)^\intercal$$

eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3$ von $\mathbb{R}^3$ mit $L(v_1) = L(f_1)$, $L(v_1, v_2) = L(f_1, f_2)$ und $L(v_1, v_2, v_3) = L(f_1, f_2, f_3)$.

$$f_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \qquad f_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \qquad f_3 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

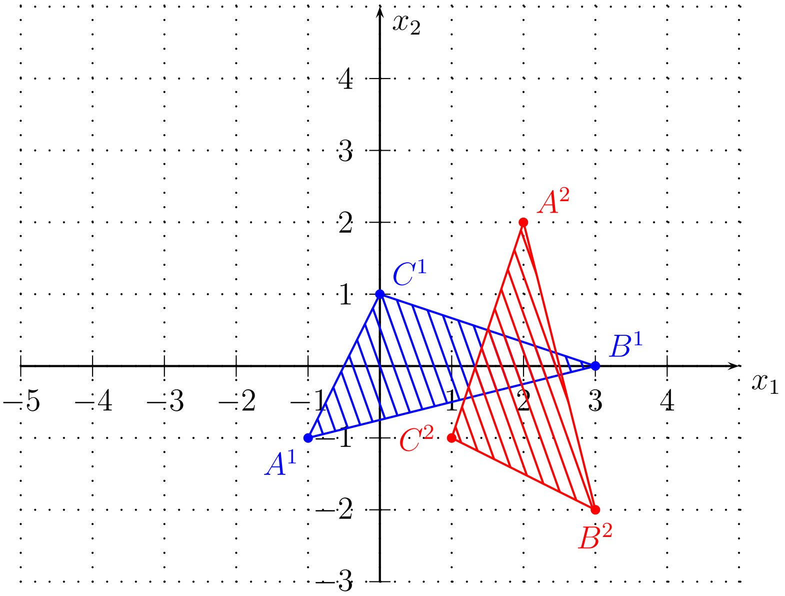
Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die folgenden Punkte

$$A^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter sind die Dreiecksflächen D_1 und D_2 gegeben durch

$$D_i = \left\{ \lambda_1 A^i + \lambda_2 B^i + \lambda_3 C^i \,\middle|\, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \text{ und } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geqq 0 \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Zeichnen Sie die Mengen D_1 und D_2 in das folgende Schaubild ein.



Es sei $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung, die D_1 in D_2 überführt, d.h. $\alpha(D_1) = D_2$. Bestimmen Sie

$$\alpha\left(A^1\right) = \boxed{B^2}\,, \quad \alpha\left(B^1\right) = \boxed{A^2}\,, \quad \alpha\left(C^1\right) = \boxed{C^2}\,.$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen lineare Abbildungen, affine Abbildungen, Bewegungen und/oder eigentliche Bewegungen sind. Tragen Sie "ja" ein, falls die Funktion die gewünschte Eigenschaft hat; "nein", falls nicht.

	linear	affin	Bewegung	eigentlich
$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^\intercal \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} x$	nein	nein	nein	nein
$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} v$	ja	ja	nein	nein
$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(-y+x+1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{pmatrix}$	nein	ja	ja	ja

---

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Drehung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} x\,.$$

Bestimmen Sie einen normierten Vektor v, der die Drehachse aufspannt, sowie den Drehwinkel φ.

$$v = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad \varphi = \boxed{\frac{1}{2}\pi}$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Punkte $P = (-5, 4)$ und $Q = (-2, 3)$ sowie die Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left(P;\ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{G} = \left(Q;\ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation, welche von $\mathbb{F}$-Koordinaten auf Standardkoordinaten $\mathbb{E}$ umrechnet, sowie die Koordinatentransformation von $\mathbb{E}$ auf $\mathbb{G}$.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}\, v + \boxed{\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} -1/3 & 1 \\ -2/3 & 1 \end{pmatrix}}\, v + \boxed{\begin{pmatrix} -11/3 \\ -13/3 \end{pmatrix}}$$

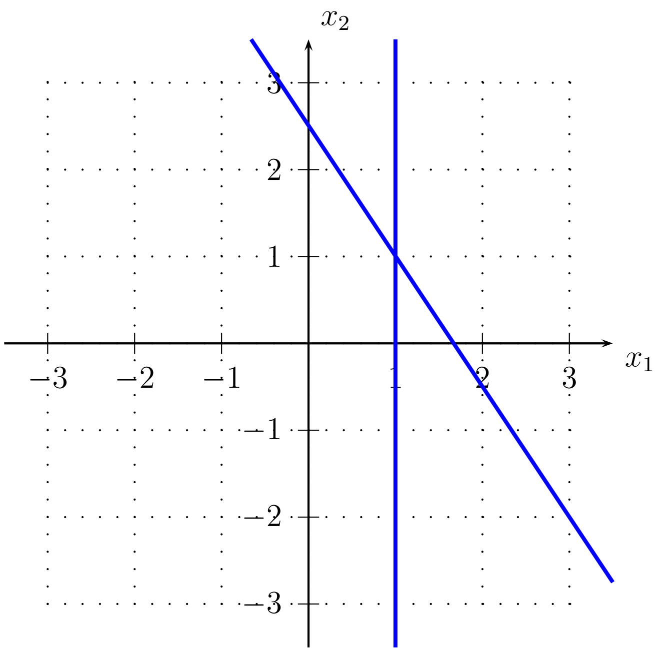
Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Gegeben seien die Quadrik Q und die affine Abbildung α durch

$$Q := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 - x_2^2 = 0\right\},$$

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie die Quadrik $\alpha(Q)$.



Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alle komplexen Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{-1}, \quad \lambda_2 = \boxed{3i}, \quad \lambda_3 = \boxed{-3i}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass gilt $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & i & -i \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & -3i \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben sind die Quadriken

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -4x_1^2 - 4x_2^2 - 8x_1x_2 - 8x_1 - 8x_2 - 5 = 0 \right\} \quad \text{und} \\ Q_2 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 5x_1^2 + 4x_2^2 - 6x_1x_2 + 6x_1 + 2 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie jeweils den Rang der symmetrischen Matrix A, die den quadratischen Teil beschreibt und den Rang der erweiterten Matrix A_{erw}. Entscheiden Sie, ob es sich um eine Mittelpunktsquadrik, eine parabolische Quadrik oder eine kegelige Quadrik handelt und tragen Sie Ihre Entscheidung in die Spalte "Typ" ein.

	Rg A	Rg A_{erw}	Typ
Q_1	1	2	Mittelpunktsquadrik
Q_2	2	3	Mittelpunktsquadrik