Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/5	/3	/6	/3	/3	/3	/5	/3	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Nebenstehende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)
Gegeben ist die folgende Affinität: $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Geben Sie den linearen Anteil A und den Translationsanteil t von α an:

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}} \qquad t = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Geben Sie außerdem den linearen Anteil B und den Translationsanteil s der Umkehrabbildung α^{-1} an:

$$B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad s = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Die Abbildung $v \mapsto Av$ beschreibt eine Drehung um den Ursprung. Geben Sie den Drehwinkel φ an:

$$\varphi = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

(b) Die Abbildung $v \mapsto Bv$ beschreibt eine Spiegelung. Bestimmen Sie die Spiegelungsachse g:

$$g = \boxed{\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Verwenden Sie das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren, um eine Orthonormalbasis f_1, f_2, f_3 für den Unterraum $W = \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$ von $\mathbb{R}^4$ zu konstruieren. Dabei sei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie f_1 durch Normierung von b_1.

(b) Berechnen Sie einen normierten Vektor $f_2 \in \mathrm{L}(f_1, b_2)$ orthogonal zu f_1.

(c) Berechnen Sie einen normierten Vektor $f_3 \in \mathrm{L}(f_1, f_2, b_3)$ orthogonal zu $\mathrm{L}(f_1, f_2)$.

$$f_1 = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad f_2 = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad f_3 = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Entwickeln Sie $\det A$ nach der 2. Zeile

$$\det A = \boxed{-2} \cdot \det\left(\boxed{\begin{matrix} \alpha & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix}}\right) + \boxed{(-4)} \cdot \det\left(\boxed{\begin{matrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix}}\right) + \boxed{1} \cdot \det\left(\boxed{\begin{matrix} 3 & \alpha \\ 1 & 2 \end{matrix}}\right)$$

und berechnen Sie $\det A = \boxed{-26-5\alpha}$. Für welche α ist die Matrix nicht invertierbar? $\alpha = \boxed{-26/5}$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*)

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenräume $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

(a) Geben Sie die Eigenwerte von A mit deren geometrischer und algebraischer Vielfachheit an:

Eigenwert	algebraische Vielfachheit	geometrische Vielfachheit
-1	2	2
5	1	1

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

	wahr	falsch
A ist invertierbar	√	
A ist orthogonal diagonalisierbar	√	
A ist positiv definit		√

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2)$.

Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (-4, 2)^{\mathsf{T}}, \qquad _{\mathbb{E}}P_1 = (0, 4)^{\mathsf{T}}, \qquad _{\mathbb{E}}P_2 = (-3, 2)^{\mathsf{T}}.$$

Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F} = (Q; f_1, f_2)$ an, in dem Folgendes gilt:

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0, 0)^{\mathsf{T}}, \qquad _{\mathbb{F}}P_1 = (1, 0)^{\mathsf{T}}, \qquad _{\mathbb{F}}P_2 = (0, 1)^{\mathsf{T}} :$$

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{\begin{matrix} -4 \\ 2 \end{matrix}} ; \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}} , \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \right)$$

Geben Sie die Koordinatentransformationen $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an:

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \left(\boxed{\begin{matrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}} \right) v + \left(\boxed{\begin{matrix} -4 \\ 2 \end{matrix}} \right), \qquad _{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \left(\boxed{\begin{matrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 \end{matrix}} \right) v + \left(\boxed{\begin{matrix} -1 \\ 8 \end{matrix}} \right).$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{-1}, \quad \lambda_2 = \boxed{0}, \quad \lambda_3 = \boxed{3}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und dazu eine Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1} A\, T$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Quadrik Q mit der Gleichung

$$9x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_3^2 + 12x_1x_3 - 1 = 0.$$

Geben Sie A, a und c für die Matrixform $x^\mathsf{T} Ax + 2a^\mathsf{T} x + c = 0$ dieser Gleichung an.

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}} \qquad a^\mathsf{T} = \boxed{(0, 0, 0)} \qquad c = \boxed{-1}$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Q: $\boxed{-8y_2^2 - 13y_3^2 + 1 = 0}$

Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik Q: $\boxed{\text{elliptischer Zylinder}}$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/5	/3	/6	/3	/3	/3	/5	/3	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Nebenstehende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)
Gegeben ist die folgende Affinität: $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -3 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Geben Sie den linearen Anteil A und den Translationsanteil t von α an:

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -3 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}} \qquad t = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Geben Sie außerdem den linearen Anteil B und den Translationsanteil s der Umkehrabbildung α^{-1} an:

$$B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad s = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Die Abbildung $v \mapsto Av$ beschreibt eine Drehung um den Ursprung. Geben Sie den Drehwinkel φ an:

$$\varphi = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

(b) Die Abbildung $v \mapsto Bv$ beschreibt eine Spiegelung. Bestimmen Sie die Spiegelungsachse g:

$$g = \boxed{\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Verwenden Sie das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren, um eine Orthonormalbasis f_1, f_2, f_3 für den Unterraum $W = \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$ von $\mathbb{R}^4$ zu konstruieren. Dabei sei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie f_1 durch Normierung von b_1.

(b) Berechnen Sie einen normierten Vektor $f_2 \in \mathrm{L}(f_1, b_2)$ orthogonal zu f_1.

(c) Berechnen Sie einen normierten Vektor $f_3 \in \mathrm{L}(f_1, f_2, b_3)$ orthogonal zu $\mathrm{L}(f_1, f_2)$.

$$f_1 = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad f_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad f_3 = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & \alpha & -3 \end{pmatrix}$. Entwickeln Sie $\det A$ nach der 1. Spalte

$$\det A = \boxed{-1} \cdot \det\left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ \alpha & -3 \end{matrix}}\right) + \boxed{(-2)} \cdot \det\left(\boxed{\begin{matrix} 4 & 2 \\ \alpha & -3 \end{matrix}}\right) + \boxed{3} \cdot \det\left(\boxed{\begin{matrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}}\right)$$

und berechnen Sie $\det A = \boxed{33+5\alpha}$. Für welche α ist die Matrix nicht invertierbar? $\alpha = \boxed{-33/5}$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*)

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenräume $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ and $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

(a) Geben Sie die Eigenwerte von A mit deren geometrischer und algebraischer Vielfachheit an:

Eigenwert	algebraische Vielfachheit	geometrische Vielfachheit
-4	2	2
5	1	1

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

	wahr	falsch
A ist invertierbar	$\surd$	
A ist orthogonal diagonalisierbar	$\surd$	
A ist positiv definit		$\surd$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2)$.

Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (3,-1)^\intercal, \qquad _{\mathbb{E}}P_1 = (2,0)^\intercal, \qquad _{\mathbb{E}}P_2 = (3,-3)^\intercal.$$

Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F} = (Q; f_1, f_2)$ an, in dem Folgendes gilt:

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0,0)^\intercal, \qquad _{\mathbb{F}}P_1 = (1,0)^\intercal, \qquad _{\mathbb{F}}P_2 = (0,1)^\intercal :$$

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{\begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}} ; \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}} , \boxed{\begin{matrix} 0 \\ -2 \end{matrix}} \right)$$

Geben Sie die Koordinatentransformationen $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an:

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \left(\boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{matrix}} \right) v + \left(\boxed{\begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}} \right), \qquad _{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \left(\boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix}} \right) v + \left(\boxed{\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}} \right).$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{-2}, \quad \lambda_2 = \boxed{0}, \quad \lambda_3 = \boxed{2}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und dazu eine Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Quadrik Q mit der Gleichung

$$-4x_1^2 + 8x_2^2 - 9x_3^2 + 12x_1x_3 + 1 = 0.$$

Geben Sie A, a und c für die Matrixform $x^\mathsf{T}Ax + 2a^\mathsf{T}x + c = 0$ dieser Gleichung an.

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \\ 6 & 0 & -9 \end{pmatrix}} \qquad a^\mathsf{T} = \boxed{(0,0,0)} \qquad c = \boxed{1}$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Q: $\boxed{8y_2^2 - 13y_3^2 + 1 = 0}$

Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik Q: $\boxed{\text{hyperbolischer Zylinder}}$

Name, Vorname: ☐ **Matrikel-Nummer:** ☐ **Studien-gang:** ☐

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/5	/3	/6	/3	/3	/3	/5	/3	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Nebenstehende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Gruppennr.:** ☐

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)
Gegeben ist die folgende Affinität: $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Geben Sie den linearen Anteil A und den Translationsanteil t von α an:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Geben Sie außerdem den linearen Anteil B und den Translationsanteil s der Umkehrabbildung α^{-1} an:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad s = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Die Abbildung $v \mapsto Av$ beschreibt eine Drehung um den Ursprung. Geben Sie den Drehwinkel φ an:

$$\varphi = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

(b) Die Abbildung $v \mapsto Bv$ beschreibt eine Spiegelung. Bestimmen Sie die Spiegelungsachse g:

$$g = \boxed{\left\{\lambda \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Verwenden Sie das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren, um eine Orthonormalbasis f_1, f_2, f_3 für den Unterraum $W = \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$ von $\mathbb{R}^4$ zu konstruieren. Dabei sei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie f_1 durch Normierung von b_1.

(b) Berechnen Sie einen normierten Vektor $f_2 \in \mathrm{L}(f_1, b_2)$ orthogonal zu f_1.

(c) Berechnen Sie einen normierten Vektor $f_3 \in \mathrm{L}(f_1, f_2, b_3)$ orthogonal zu $\mathrm{L}(f_1, f_2)$.

$$f_1 = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad f_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}} \qquad f_3 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Entwickeln Sie $\det A$ nach der 3. Zeile

$$\det A = \boxed{-4} \cdot \det\left(\boxed{\begin{matrix} 3 & \alpha \\ -2 & 1 \end{matrix}}\right) + \boxed{(-2)} \cdot \det\left(\boxed{\begin{matrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{matrix}}\right) + \boxed{1} \cdot \det\left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{matrix}}\right)$$

und berechnen Sie $\det A = \boxed{-19-6\alpha}$. Für welche α ist die Matrix nicht invertierbar? $\alpha = \boxed{-19/6}$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*)

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ hat die Eigenräume $\mathrm{L}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right)$ and $\mathrm{L}\left(\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right)$.

(a) Geben Sie die Eigenwerte von A mit deren geometrischer und algebraischer Vielfachheit an:

Eigenwert	algebraische Vielfachheit	geometrische Vielfachheit
1	2	2
4	1	1

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

	wahr	falsch
A ist invertierbar	$\surd$	
A ist orthogonal diagonalisierbar	$\surd$	
A ist positiv definit	$\surd$	

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2)$.

Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (-2,1)^\intercal, \qquad _{\mathbb{E}}P_1 = (2,0)^\intercal, \qquad _{\mathbb{E}}P_2 = (1,1)^\intercal.$$

Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F} = (Q; f_1, f_2)$ an, in dem Folgendes gilt:

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0,0)^\intercal, \qquad _{\mathbb{F}}P_1 = (1,0)^\intercal, \qquad _{\mathbb{F}}P_2 = (0,1)^\intercal :$$

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{\begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}} ; \boxed{\begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}} \right)$$

Geben Sie die Koordinatentransformationen $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an:

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \left(\boxed{\begin{matrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{matrix}} \right) v + \left(\boxed{\begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}} \right), \qquad _{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \left(\boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{matrix}} \right) v + \left(\boxed{\begin{matrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{matrix}} \right).$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{-1}, \quad \lambda_2 = \boxed{0}, \quad \lambda_3 = \boxed{4}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und dazu eine Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1} A\, T$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Quadrik Q mit der Gleichung

$$4x_1^2 + 5x_2^2 + 16x_3^2 + 16x_1x_3 - 1 = 0.$$

Geben Sie A, a und c für die Matrixform $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ dieser Gleichung an.

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 16 \end{pmatrix}} \qquad a^\intercal = \boxed{(0, 0, 0)} \qquad c = \boxed{-1}$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Q: $\boxed{-5y_2^2 - 20y_3^2 + 1 = 0}$

Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik Q: $\boxed{\text{elliptischer Zylinder}}$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/5	/3	/6	/3	/3	/3	/5	/3	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Nebenstehende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)
Gegeben ist die folgende Affinität: $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Geben Sie den linearen Anteil A und den Translationsanteil t von α an:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie außerdem den linearen Anteil B und den Translationsanteil s der Umkehrabbildung α^{-1} an:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Die Abbildung $v \mapsto Av$ beschreibt eine Drehung um den Ursprung. Geben Sie den Drehwinkel φ an:

$$\varphi = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

(b) Die Abbildung $v \mapsto Bv$ beschreibt eine Spiegelung. Bestimmen Sie die Spiegelungsachse g:

$$g = \boxed{\left\{\lambda \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Verwenden Sie das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren, um eine Orthonormalbasis f_1, f_2, f_3 für den Unterraum $W = \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$ von $\mathbb{R}^4$ zu konstruieren. Dabei sei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie f_1 durch Normierung von b_1.

(b) Berechnen Sie einen normierten Vektor $f_2 \in \mathrm{L}(f_1, b_2)$ orthogonal zu f_1.

(c) Berechnen Sie einen normierten Vektor $f_3 \in \mathrm{L}(f_1, f_2, b_3)$ orthogonal zu $\mathrm{L}(f_1, f_2)$.

$$f_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad f_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad f_3 = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \\ \alpha & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Entwickeln Sie $\det A$ nach der 3. Spalte

$$\det A = \boxed{-3} \cdot \det\left(\boxed{\begin{matrix} -3 & 1 \\ \alpha & 2 \end{matrix}}\right) + \boxed{(-4)} \cdot \det\left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ \alpha & 2 \end{matrix}}\right) + \boxed{1} \cdot \det\left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{matrix}}\right)$$

und berechnen Sie $\det A = \boxed{17+11\alpha}$. Für welche α ist die Matrix nicht invertierbar? $\alpha = \boxed{-17/11}$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*)

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ hat die Eigenräume $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ and $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

(a) Geben Sie die Eigenwerte von A mit deren geometrischer und algebraischer Vielfachheit an:

Eigenwert	algebraische Vielfachheit	geometrische Vielfachheit
4	2	2
1	1	1

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

	wahr	falsch
A ist invertierbar	$\surd$	
A ist orthogonal diagonalisierbar	$\surd$	
A ist positiv definit	$\surd$	

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2)$.

Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (2,1)^\mathsf{T}, \qquad _{\mathbb{E}}P_1 = (0,-2)^\mathsf{T}, \qquad _{\mathbb{E}}P_2 = (2,3)^\mathsf{T}.$$

Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F} = (Q; f_1, f_2)$ an, in dem Folgendes gilt:

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0,0)^\mathsf{T}, \qquad _{\mathbb{F}}P_1 = (1,0)^\mathsf{T}, \qquad _{\mathbb{F}}P_2 = (0,1)^\mathsf{T} :$$

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}} ; \boxed{\begin{matrix} -2 \\ -3 \end{matrix}} , \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}} \right)$$

Geben Sie die Koordinatentransformationen $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an:

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \left(\boxed{\begin{matrix} -2 & 0 \\ -3 & 2 \end{matrix}} \right) v + \left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}} \right), \qquad _{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \left(\boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{matrix}} \right) v + \left(\boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \right).$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{-2}, \quad \lambda_2 = \boxed{0}, \quad \lambda_3 = \boxed{3}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und dazu eine Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1}A\,T$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Quadrik Q mit der Gleichung

$$-16x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 16x_1x_3 + 1 = 0.$$

Geben Sie A, a und c für die Matrixform $x^{\mathsf{T}}Ax + 2a^{\mathsf{T}}x + c = 0$ dieser Gleichung an.

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} -16 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & -4 \end{pmatrix}} \qquad a^{\mathsf{T}} = \boxed{(0,0,0)} \qquad c = \boxed{1}$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Q: $\boxed{5y_2^2 - 20y_3^2 + 1 = 0}$

Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik Q: $\boxed{\text{hyperbolischer Zylinder}}$
