Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/5	/8	/4	/2	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die affine Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax + t$, wobei

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

A ist orthogonal. wahr ⊗ falsch ◯

Es gilt $|\alpha(t) - t| = |t|$. wahr ⊗ falsch ◯

Berechnen Sie außerdem die Determinante von A:

$\det A = \boxed{1}$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben ist die folgende Affinität:

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Umkehrabbildung an:

$$\varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 8 & -21 \\ -1 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}\, x + \boxed{\begin{pmatrix} 45 \\ -28 \\ 4 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{2}, \quad \lambda_2 = \boxed{1+i}, \quad \lambda_3 = \boxed{1-i}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}\right)}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1}A\,T$ gilt.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*)

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ hat die Eigenräume $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$,

die Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ hat die Eigenräume $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

(a) Geben Sie die Eigenwerte von A und B und deren geometrische und algebraische Vielfachheiten an:

Eigenwerte von A	algebraische Vielfachheit	geometrische Vielfachheit
1	2	1
2	1	1

Eigenwerte von B	algebraische Vielfachheit	geometrische Vielfachheit
4	2	2
1	1	1

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

	wahr	falsch
B ist invertierbar, aber A nicht.		$\surd$
A ist orthogonal diagonalisierbar.		$\surd$
B ist orthogonal diagonalisierbar.	$\surd$	
B ist indefinit.		$\surd$

(c) Geben Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ an, die aus Eigenvektoren von B besteht:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Im $\mathbb{R}^2$ sind zwei Koordinatensysteme $\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$ mit

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben. Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) = \left(\boxed{\begin{matrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{matrix}} \right) v + \left(\boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \right), \qquad {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \left(\boxed{\begin{matrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{matrix}} \right) v + \left(\boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}} \right).$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x_1^2 + 2\sqrt{5}x_1x_2 - x_2^2 + 1 = 0 \right\}.$$

Geben Sie die symmetrische Matrix A an, die den quadratischen Anteil beschreibt. Bringen Sie A auf Diagonalgestalt D:

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -1 \end{pmatrix}}, \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}.$$

Geben Sie die affine Klassifikation von Q an: $\boxed{\text{Hyperbel}}$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Berechnen Sie für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Limes superior, den Limes inferior und gegebenenfalls den Grenzwert. Tragen Sie "existiert nicht" ein, falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nicht existiert.

	$\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$	$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
$a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$	1	-1	existiert nicht
$a_n = \left(\dfrac{4 + (-1)^n}{3} \right)^n$	$+\infty$	1	existiert nicht
$a_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n+2}$	0	0	0
$a_n = 1 - \left(\dfrac{5}{6} \right)^n$	1	1	1
