Scheinklausur, Version 1 **Höhere Mathematik 2** **Musterlösung** **12.02.2011**

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/3	/4	/8	/3	/3	/4	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

  Viel Erfolg!

$f(x)$	x^a	e^x	$\ln\lvert x\rvert$	b^x	$\sin x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$	$a\cdot x^{a-1}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\ln b\cdot b^x$	$\cos x$
$f(x)$	$\tan x$	$\arctan x$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\cos x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\cosh x$	$\sinh x$	$-\sin x$

$(a\in\mathbb{R})$
$(b\in\mathbb{R}^+)$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0+0} x^x = \boxed{1} \qquad (x^x)' = \boxed{x^x\cdot(1+\ln(x))}$$

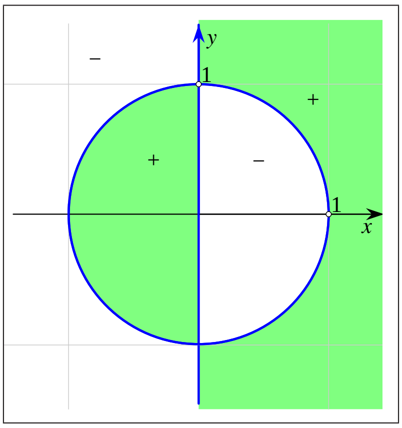
Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Tragen Sie für die folgenden Reihen den Konvergenzradius in das entsprechende Kästchen ein.

$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot k \cdot (z-i)^k$	$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{25}\right)^k \cdot z^{2k}$	$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k^3-1}{k^2+k+1}\right) \cdot z^k$
2	5	1

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (x^2+y^2-1)x.$$

Skizzieren Sie die Nullstellenmenge der Funktion und markieren Sie die Bereiche mit positiven beziehungsweise negativen Funktionswerten:



Bestimmen Sie

$$\operatorname{grad}(h)(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} 3x^2+y^2-1 \\ 2xy \end{pmatrix}}.$$

Bestimmen und klassifizieren Sie alle kritischen Stellen der Funktion h. Berechnen Sie außerdem den Funktionswert an diesen Stellen.

Stelle	Funktionswert	Typ
$(0,1)$	0	Sattelpunkt
$(0,-1)$	0	Sattelpunkt
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$	$-\frac{2}{\sqrt{27}}$	Minimum
$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$	$\frac{2}{\sqrt{27}}$	Maximum

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Bestimmen Sie

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\frac{\pi}{2}} \qquad \int_{0}^{a} x^2\cos(x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{a^2\sin(a) + 2a\cos(a) - 2\sin(a)}$$

$$\int_{-2}^{0} |x|\,\mathrm{d}\,x = \boxed{2} \qquad \int \frac{2}{x^2+2x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\Big[\ln(|x|) - \ln(|x+2|)\Big]}$$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x \cdot e^x.$$

Bestimmen Sie die n-te Ableitung von f.

$$A(n): \qquad f^{(n)}(x) = \boxed{(x+n) \cdot e^x}$$

Beweisen Sie nun die Richtigkeit Ihrer Behauptung $A(n)$ per Induktion.

IA Die Behauptung $A(n)$ gilt für $n = \boxed{0}$:

$$f^{\boxed{(0)}}(x) = \boxed{(x+0) \cdot e^x}$$

IS Angenommen, die Behauptung $A(n)$ sei bewiesen für ein $n \in \mathbb{N}_0$.

Formulieren Sie die Behauptung $A(n+1)$:

$$\boxed{f^{(n+1)}(x) = ((n+1)+x)e^x}$$

Berechnen Sie nun

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f^{(n)}(x) = \boxed{((n+1)+x)e^x}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$g_\alpha \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2 \colon (x,y)^\intercal \mapsto (\ln(y), \frac{x}{y}\alpha^2)^\intercal.$$

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix:

$$\mathrm{J}(g_\alpha)(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y} \\ \frac{\alpha^2}{y} & -\frac{\alpha^2 x}{y^2} \end{pmatrix}}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert ein Potential von g_α?

$$\boxed{\{1, -1\}}$$

Bestimmen Sie ein Potential U von g_1: $U(x,y) = \boxed{x \ln(y)}$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, welche die folgenden Ungleichungen erfüllen:

$$\frac{|x-3| + |x+3|}{6} \leqq 2 \qquad \boxed{[-6, 6]}$$

$$x - 11 < x^2 - 13 \qquad \boxed{(-\infty, -1) \cup (2, \infty)}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto e^{xy}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Stufe um den Entwicklungspunkt $(1,2)$:

$$T_2(f,(x,y),(1,2)) = e^2 + e^2(2,1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \frac{e^2}{2}(x-1, y-2)\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$$
$$= e^2 + 2e^2(x-1) + e^2(y-2) + 2e^2(x-1)^2 + 3e^2(x-1)(y-2) + \frac{e^2}{2}(y-2)^2$$