Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/3	/4	/4	/3	/5	/4	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Gruppennr.:** ☐

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{\sqrt{k+1}} x^k: \quad \rho = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\sum_{k=0}^{\infty} -\frac{3^k}{4} x^{2k}: \quad \rho = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-3^{-1})^k = \boxed{\frac{3}{4}} \qquad \frac{7\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{7\pi}{2}\right)^{2k} = \boxed{-1}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Stellen Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x^2\cos(5x)$$

als Potenzreihe um 0 dar.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-25)^k}{(2k)!}x^{2k+2}}$$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{-3,1,3\}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \frac{2x^3-4x^2-2x+4}{3(x^2-9)(x-1)}$$

die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{2/3} \qquad \lim_{x\to-3+0} f(x) = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \boxed{4/27} \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = \boxed{1/6}$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \cos(e^{3x}-1).$$

Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung von f.

$$f'(x) = \boxed{-3e^{3x}\sin(e^{3x}-1)}$$

$$f''(x) = \boxed{-9e^{3x}\sin(e^{3x}-1) - 9e^{6x}\cos(e^{3x}-1)}$$

Stellen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,x,0)$ der Stufe 2 um den Punkt 0 auf.

$$T_2(f,x,0) = \boxed{1-\frac{9}{2}x^2}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int xe^{-2x}\mathrm{d}x =$	$\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]$
$\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\mathrm{d}x =$	$\frac{1}{4}$
$\int 3x^2e^x\cos(x^3e^x) + x^3e^x\cos(x^3e^x)\mathrm{d}x =$	$\left[\sin(x^3e^x)\right]$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto y^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{x^3 - x^2 - 2x} \\ \boxed{2y} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{3x^2 - 2x - 2} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen mit ihrem Typ an.

kritische Stelle	Typ
(0,0)	Sattel
(-1,0)	Min
(2,0)	Min

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{1}{2y^2+1} \cdot \ln(x^2+4)\,.$$

Berechnen Sie den Gradienten:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\boxed{\frac{2x}{(x^2+4)(2y^2+1)}}\,, \boxed{\frac{-4y\cdot\ln(x^2+4)}{(2y^2+1)^2}} \right)^{\mathsf{T}}.$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(1, 0, f(1,0))$ an den Graphen von f:

$$\boxed{\frac{2}{5}}\; x + \boxed{0}\; y + \boxed{-1}\; z + \boxed{\ln(5) - \frac{2}{5}} = 0.$$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} y^3 - 2xy^2 + 3x^2y \\ \alpha xy^2 - 2x^2y + x^3 \end{pmatrix}$$

ein Potential?

$$\boxed{\alpha = 3}$$

Bestimmen Sie für diese α ein Potential U.

$$U(x,y) = \boxed{xy^3 - x^2y^2 + x^3y}$$

Name, Vorname: ____ **Matrikel-Nummer:** ____ **Studien-gang:** ____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/3	/4	/4	/3	/5	/4	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ____ **Gruppennr.:** ____

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

$\sum_{k=0}^{\infty} -\frac{2^k}{3} x^{2k}$: $\rho = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{\sqrt{k+1}} x^k$: $\rho = \boxed{\frac{1}{4}}$

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-2^{-1})^k = \boxed{\frac{2}{3}} \qquad \frac{5\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{5\pi}{2}\right)^{2k} = \boxed{1}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Stellen Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x^3\cos(4x)$$

als Potenzreihe um 0 dar.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-16)^k}{(2k)!}x^{2k+3}}$$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{-3,1,3\}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \frac{3x^3-6x^2-3x+6}{2(x^2-9)(x-1)}$$

die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{3/2} \qquad \lim_{x\to-3+0} f(x) = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \boxed{1/3} \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = \boxed{3/8}$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \sin(e^{3x}-1).$$

Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung von f.

$$f'(x) = \boxed{3e^{3x}\cos(e^{3x}-1)}$$

$$f''(x) = \boxed{9e^{3x}\cos(e^{3x}-1)-9e^{6x}\sin(e^{3x}-1)}$$

Stellen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,x,0)$ der Stufe 2 um den Punkt 0 auf.

$$T_2(f,x,0) = \boxed{3x+\frac{9}{2}x^2}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int xe^{-3x}\mathrm{d}x = \boxed{\left[-\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x}\right]}$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-3x}\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{9}}$$

$$\int 2xe^x\cos(x^2e^x) + x^2e^x\cos(x^2e^x)\mathrm{d}x = \boxed{\left[\sin(x^2e^x)\right]}$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto -y^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{x^3 - x^2 - 2x} \\ \boxed{-2y} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{3x^2 - 2x - 2} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{-2} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen mit ihrem Typ an.

kritische Stelle	Typ
(0,0)	Max
(-1,0)	Sattel
(2,0)	Sattel

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{1}{3x^2+2} \cdot \ln(y^2+3)\,.$$

Berechnen Sie den Gradienten:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\boxed{\frac{-6x \cdot \ln(y^2+3)}{(3x^2+2)^2}}\,,\ \boxed{\frac{2y}{(y^2+3)(3x^2+2)}} \right)^{\mathsf{T}}.$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(0, 1, f(0,1))$ an den Graphen von f:

$$\boxed{0}\ x + \boxed{\frac{1}{4}}\ y + \boxed{-1}\ z + \boxed{\frac{1}{2}\ln(4) - \frac{1}{4}} = 0.$$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} -y^3 + 2xy^2 + 3x^2y \\ -3xy^2 + \alpha x^2 y + x^3 \end{pmatrix}$$

ein Potential?

$$\boxed{\alpha = 2}$$

Bestimmen Sie für diese α ein Potential U.

$$U(x,y) = \boxed{-xy^3 + x^2y^2 + x^3y}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studiengang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/3	/4	/4	/3	/5	/4	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Gruppennr.:** ☐

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{\sqrt{k+1}}\, x^k : \quad \rho = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} -\frac{5^k}{2}\, x^{2k} : \quad \rho = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(4^{-1})^k = \boxed{\frac{4}{3}} \qquad \frac{7\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{7\pi}{2}\right)^{2k} = \boxed{-1}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Stellen Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x^4\cos(3x)$$

als Potenzreihe um 0 dar.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-9)^k}{(2k)!}x^{2k+4}}$$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\smallsetminus\{-3,1,3\}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \frac{4-2x-4x^2+2x^3}{3(x^2-9)(1-x)}$$

die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{-2/3} \qquad \lim_{x\to-3+0} f(x) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \boxed{-4/27} \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = \boxed{-1/6}$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \cos(e^{2x}-1).$$

Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung von f.

$$f'(x) = \boxed{-2e^{2x}\sin(e^{2x}-1)}$$

$$f''(x) = \boxed{-4e^{2x}\sin(e^{2x}-1)-4e^{4x}\cos(e^{2x}-1)}$$

Stellen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,x,0)$ der Stufe 2 um den Punkt 0 auf.

$$T_2(f,x,0) = \boxed{1-2x^2}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int xe^{2x}\mathrm{d}x =$	$\left[\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right]$
$\int_{-\infty}^{0} xe^{2x}\mathrm{d}x =$	$-\frac{1}{4}$
$\int 3x^2e^x\sin(x^3e^x) + x^3e^x\sin(x^3e^x)\mathrm{d}x =$	$\left[-\cos(x^3e^x)\right]$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto y^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{x^3 + x^2 - 2x} \\ \boxed{2y} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{3x^2 + 2x - 2} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen mit ihrem Typ an.

kritische Stelle	Typ
(0,0)	Sattel
(-2,0)	Min
(1,0)	Min

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{1}{2y^2+3} \cdot \ln(x^2+1)\,.$$

Berechnen Sie den Gradienten:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\boxed{\frac{2x}{(x^2+1)(2y^2+3)}}\,,\ \boxed{\frac{-4y \cdot \ln(x^2+1)}{(2y^2+3)^2}} \right)^{\mathsf{T}}.$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(1,0,f(1,0))$ an den Graphen von f:

$$\boxed{\frac{1}{3}}\ x + \boxed{0}\ y + \boxed{-1}\ z + \boxed{\frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}} = 0.$$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} -y^3 + 2xy^2 + 3x^2y \\ \alpha xy^2 + 2x^2y + x^3 \end{pmatrix}$$

ein Potential?

$$\boxed{\alpha = -3}$$

Bestimmen Sie für diese α ein Potential U.

$$U(x,y) = \boxed{-xy^3 + x^2y^2 + x^3y}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/3	/4	/4	/3	/5	/4	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

$\sum_{k=0}^{\infty} -\frac{7^k}{3}\,x^{2k}: \quad \rho = \boxed{\frac{1}{\sqrt{7}}}$ $\qquad$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{\sqrt{k+1}}\,x^k: \quad \rho = \boxed{\frac{1}{5}}$

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(5^{-1})^k = \boxed{\frac{5}{4}} \qquad \frac{5\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{5\pi}{2}\right)^{2k} = \boxed{1}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Stellen Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x^5\cos(2x)$$

als Potenzreihe um 0 dar.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-4)^k}{(2k)!}x^{2k+5}}$$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\smallsetminus\{-3,1,3\}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \frac{6-3x-6x^2+3x^3}{2(x^2-9)(1-x)}$$

die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{-3/2} \qquad \lim_{x\to-3+0} f(x) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \boxed{-1/3} \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = \boxed{-3/8}$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \sin(e^{2x}-1).$$

Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung von f.

$$f'(x) = \boxed{2e^{2x}\cos(e^{2x}-1)}$$

$$f''(x) = \boxed{4e^{2x}\cos(e^{2x}-1)-4e^{4x}\sin(e^{2x}-1)}$$

Stellen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,x,0)$ der Stufe 2 um den Punkt 0 auf.

$$T_2(f,x,0) = \boxed{2x+2x^2}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int xe^{3x}\mathrm{d}x =$	$\left[\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right]$
$\int_{-\infty}^{0} xe^{3x}\mathrm{d}x =$	$-\frac{1}{9}$
$\int 2xe^x \sin(x^2e^x) + x^2e^x \sin(x^2e^x)\mathrm{d}x =$	$\left[-\cos(x^2e^x)\right]$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto -y^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 + x^2 - 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2x - 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen mit ihrem Typ an.

kritische Stelle	Typ
(0,0)	Max
(-2,0)	Sattel
(1,0)	Sattel

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{1}{4x^2+1} \cdot \ln(y^2+5)\,.$$

Berechnen Sie den Gradienten:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\boxed{\frac{-8x \cdot \ln(y^2+5)}{(4x^2+1)^2}} \,,\, \boxed{\frac{2y}{(y^2+5)(4x^2+1)}} \right)^{\mathsf{T}}.$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(0,1,f(0,1))$ an den Graphen von f:

$$\boxed{0}\; x + \boxed{\frac{1}{3}}\; y + \boxed{-1}\; z + \boxed{\ln(6) - \frac{1}{3}} = 0.$$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} y^3 - 2xy^2 + 3x^2y \\ 3xy^2 + \alpha x^2 y + x^3 \end{pmatrix}$$

ein Potential?

$$\boxed{\alpha = -2}$$

Bestimmen Sie für diese α ein Potential U.

$$U(x,y) = \boxed{xy^3 - x^2y^2 + x^3y}$$
