Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/3	/3	/5	/3	/6	/6	/3	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan(x)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\, x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan(x)$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\, b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a, b \in \mathbb{R},\ b > 0$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k!} = \boxed{1 - e} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1-k} = \boxed{\frac{16}{\pi(4+\pi)}}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Stellen Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{2+x^2}$$

als Potenzreihe um 0 dar.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} x^{2k}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*)

Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von $f(x) = x\sin(x)$.

$$f'(x) = \boxed{\sin(x) + x\cos(x)} \quad , \quad f''(x) = \boxed{2\cos(x) - x\sin(x)}$$

Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos(x))^2}{x\sin(x)} = \boxed{1} \; .$$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int \frac{3x+7}{(x+1)(x+3)} \mathrm{d}x = \boxed{[2\ln|x+1| + \ln|x+3|]}$$

$$\int e^{-3x+9} \mathrm{d}x = \boxed{-\frac{1}{3} e^{-3x+9} + c}$$

$$\int_3^{+\infty} e^{-3x+9} \mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie alle ersten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto \sqrt{x^2+1}\, y^{\sin(z)} \, .$$

$$f_x(x,y,z) = \boxed{\frac{x\, y^{\sin(z)}}{\sqrt{x^2+1}}} \qquad f_y(x,y,z) = \boxed{\sqrt{x^2+1}\, y^{\sin(z)-1}\, \sin(z)}$$

$$f_z(x,y,z) = \boxed{\sqrt{x^2+1}\, \ln(y)\, y^{\sin(z)}\, \cos(z)}$$

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Berechnen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x, y, z) \mapsto xy + \sin(y + z)$$

den Gradienten und die Hesse-Matrix.

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \boxed{y} \\ \boxed{x + \cos(y + z)} \\ \boxed{\cos(y + z)} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}f\,(x, y, z) = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{-\sin(y + z)} & \boxed{-\sin(y + z)} \\ \boxed{0} & \boxed{-\sin(y + z)} & \boxed{-\sin(y + z)} \end{pmatrix}$$

Geben Sie das Taylor-Polynom der Stufe zwei zum Entwicklungspunkt $(1, \pi, 0)$ an.

$$T_2\big(f, (x, y, z), (1, \pi, 0)\big) = \boxed{\pi + \pi(x - 1) - z + (x - 1)(y - \pi)}$$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 2x(y+3)(z-1) \\ (x^2+2)(z-1) \\ (x^2+2)(y-1+\alpha^2) \end{pmatrix}$$

mit dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{rot} f = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2x(4-\alpha^2) \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt f ein Potential?

$$\boxed{\alpha = \pm 2}$$

Bestimmen Sie für diese α ein Potential U.

$$U(x,y,z) = \boxed{(x^2+2)(y+3)(z-1)}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben ist

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 2x(y+3)(z-1) \\ (x^2+2)(z-1) \\ (x^2+2)y \end{pmatrix}$$

und eine Parametrisierung der Kurve K

$$C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3 \colon t \mapsto (t,\ 0,\ t)^\intercal .$$

Berechnen Sie

$$f\big(C(t)\big) = \boxed{\begin{pmatrix} 6t(t-1) \\ (t^2+2)(t-1) \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

sowie das Kurvenintegral

$$\int_K f(s) \bullet ds = \boxed{-1}$$
