Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/2	/3	/3	/4	/6	/3	/4	/3	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Gegeben sei die folgende komplexe Zahl

$$w = -\sqrt{3} + \mathrm{i}\ .$$

Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung $r\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ mit $0 \leqq r$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ für die folgenden komplexen Zahlen an.

$$w = \boxed{2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)}$$

$$\frac{w^{11}}{2^{12}} = \boxed{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben sei folgendes Polynom

$$p(X) = X^3 + (\sqrt{2} - 2)X^2 + (2 - 2\sqrt{2})X - 4$$

Eine Nullstelle dieses Polynoms ist bei $z_1 = 2$. Bestimmen Sie das folgende Polynom:

$$\frac{p(X)}{X-2} = \boxed{X^2 + \sqrt{2}X + 2}$$

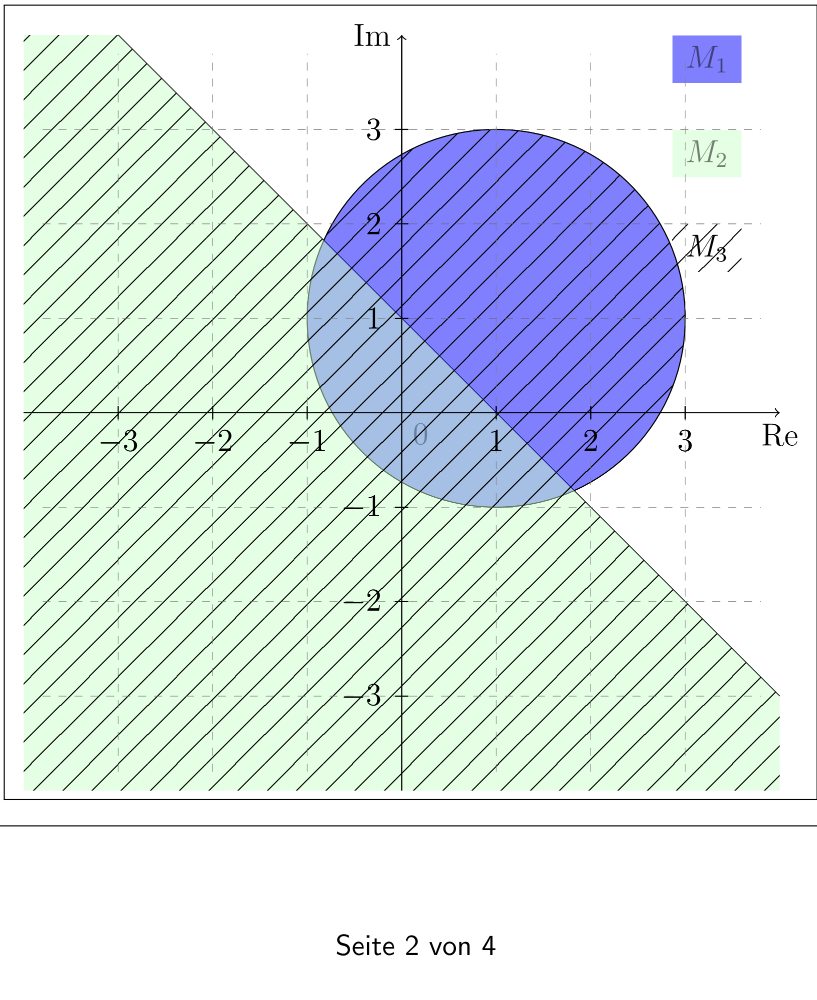
Berechnen Sie nun die restlichen Nullstellen des Polynoms p in $\mathbb{C}$.

$$z_2 = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}} \qquad z_3 = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 1 - \mathrm{i}| \leqq 2 \right\}, \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z + 1| \leqq |z - 1 - 2\mathrm{i}| \right\} \quad \text{und} \quad M_3 = M_1 \cup M_2$$

in der komplexen Zahlenebene.



Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie v_1 als Linearkombination der Vektoren v_2, v_3 und v_4 dar, d.h. bestimmen Sie Parameter $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ so, dass $v_1 = \alpha v_2 + \beta v_3 + \gamma v_4$.

$\alpha =$ $\boxed{2}$ $\beta =$ $\boxed{-2}$ $\gamma =$ $\boxed{0}$

(b) Geben Sie die Dimension des Vektorraums $W = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ an. $\boxed{2}$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*)

Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden $g_1 : P + \lambda v \, , \lambda \in \mathbb{R}$, und $g_2 : Q + \mu w \, , \mu \in \mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^3$, wobei

$$P = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden: $\boxed{(2, -3, 1)^\mathsf{T}}$

(b) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene an, die die Geraden enthält.

$$\boxed{\frac{1}{5\sqrt{5}}(8x_1 - 6x_2 + 5x_3) = \frac{39}{5\sqrt{5}}}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{über } \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Ermitteln Sie, ob folgende Vektoren im Kern oder im Bild der linearen Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} v$$

liegen. Tragen Sie „ja“ oder „nein“ in die Kästen ein.

Vektor	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
im Kern?	ja	nein	nein	ja
im Bild?	nein	nein	ja	nein

Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern (α) und Bild (α).

$\dim(\mathrm{Kern}(\alpha)) =$ 2 $\qquad \dim(\mathrm{Bild}(\alpha)) =$ 1

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Berechnen Sie zu den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

folgende Determinanten.

$\det(A) =$ 4 $\qquad \det(B) =$ 7 $\qquad \det(A^\intercal B) =$ 28

Aufgabe 10 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/2	/3	/3	/4	/6	/3	/4	/3	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Gegeben sei die folgende komplexe Zahl

$$w = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\ .$$

Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung $r\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ mit $0 \leqq r$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ für die folgenden komplexen Zahlen an.

$$w = \boxed{2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)} \qquad \frac{w^{11}}{2^{12}} = \boxed{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben sei folgendes Polynom

$$p(X) = X^3 + (\sqrt{3} - 2)X^2 + (2 - 2\sqrt{3})X - 4$$

Eine Nullstelle dieses Polynoms ist bei $z_1 = 2$. Bestimmen Sie das folgende Polynom:

$$\frac{p(X)}{X-2} = \boxed{X^2 + \sqrt{3}X + 2}$$

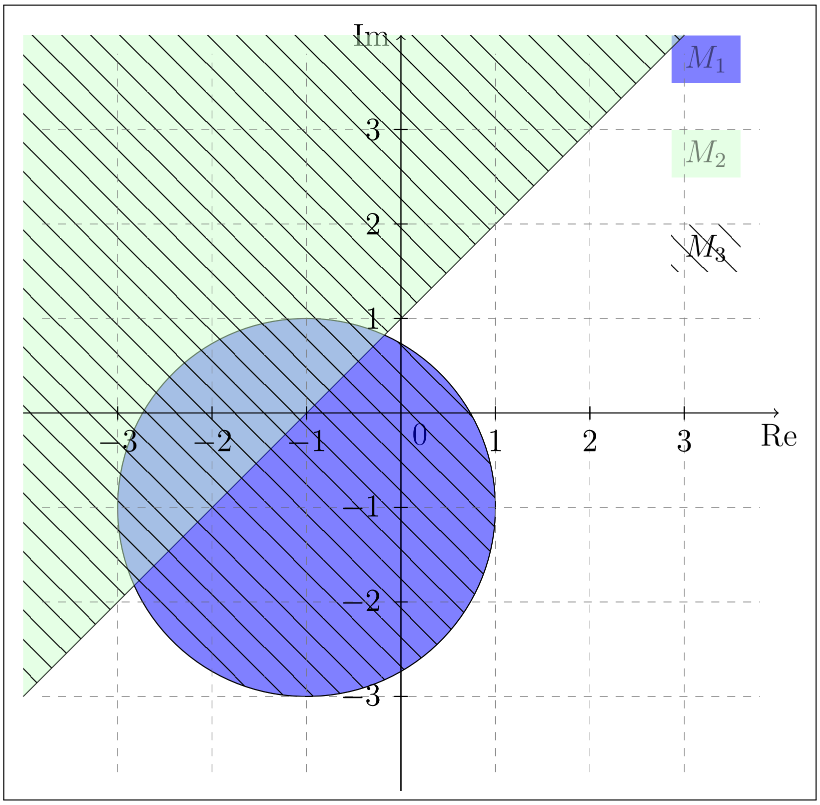
Berechnen Sie nun die restlichen Nullstellen des Polynoms p in $\mathbb{C}$.

$$z_2 = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{i}} \qquad z_3 = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{i}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z + 1 + \mathrm{i}| \leqq 2 \right\}, \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 1| \geqq |z + 1 - 2\mathrm{i}| \right\} \quad \text{und} \quad M_3 = M_1 \cup M_2$$

in der komplexen Zahlenebene.



Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie v_1 als Linearkombination der Vektoren v_2, v_3 und v_4 dar, d.h. bestimmen Sie Parameter $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ so, dass $v_1 = \alpha v_2 + \beta v_3 + \gamma v_4$.

$\alpha = \boxed{3}$ $\quad \beta = \boxed{-3}$ $\quad \gamma = \boxed{0}$

(b) Geben Sie die Dimension des Vektorraums $W = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ an. $\boxed{2}$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*)

Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden $g_1 : P + \lambda v, \lambda \in \mathbb{R}$, und $g_2 : Q + \mu w, \mu \in \mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^3$, wobei

$$P = \begin{pmatrix} -9 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \; w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden: $\boxed{(-3, 4, -1)^\intercal}$

(b) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene an, die die Geraden enthält.

$$\boxed{\tfrac{1}{3\sqrt{10}}(1x_1 + 5x_2 - 8x_3) = \tfrac{25}{3\sqrt{10}}}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{über } \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Ermitteln Sie, ob folgende Vektoren im Kern oder im Bild der linearen Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v$$

liegen. Tragen Sie „ja" oder „nein" in die Kästen ein.

Vektor	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
im Kern?	nein	ja	nein	ja
im Bild?	ja	nein	nein	nein

Bestimmen Sie die Dimensionen von $\mathrm{Kern}\,(\alpha)$ und $\mathrm{Bild}\,(\alpha)$.

$\dim(\mathrm{Bild}\,(\alpha)) = \boxed{1}$ $\qquad$ $\dim(\mathrm{Kern}\,(\alpha)) = \boxed{2}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Berechnen Sie zu den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

folgende Determinanten.

$\det(A) = \boxed{-9}$ $\qquad$ $\det(B) = \boxed{2}$ $\qquad$ $\det(A^{\mathsf{T}} B) = \boxed{-18}$

Aufgabe 10 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/2	/3	/3	/4	/6	/3	/4	/3	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Gegeben sei die folgende komplexe Zahl

$$w = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\,.$$

Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung $r\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ mit $0 \leqq r$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ für die folgenden komplexen Zahlen an.

$$w = \boxed{2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)} \qquad \frac{w^{11}}{2^{12}} = \boxed{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben sei folgendes Polynom

$$p(X) = X^3 + (\sqrt{5} - 2)X^2 + (2 - 2\sqrt{5})X - 4$$

Eine Nullstelle dieses Polynoms ist bei $z_1 = 2$. Bestimmen Sie das folgende Polynom:

$$\frac{p(X)}{X-2} = \boxed{X^2 + \sqrt{5}X + 2}$$

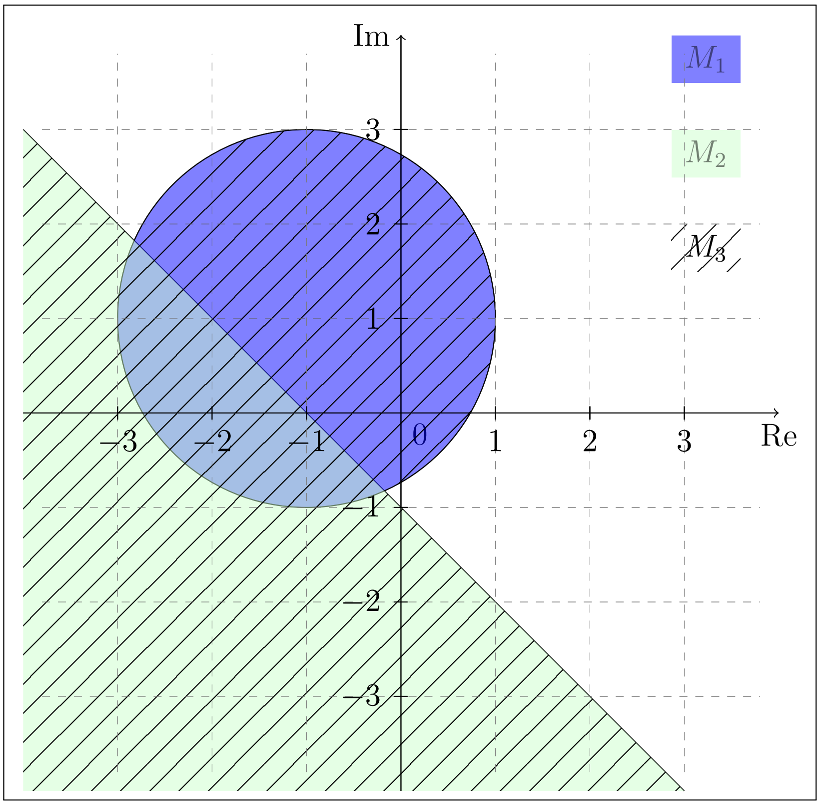
Berechnen Sie nun die restlichen Nullstellen des Polynoms p in $\mathbb{C}$.

$$z_2 = \boxed{-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}} \qquad z_3 = \boxed{-\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z + 1 - \mathrm{i}| \leqq 2 \right\}, \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - \mathrm{i}| \geqq |z + 2 + \mathrm{i}| \right\} \quad \text{und} \quad M_3 = M_1 \cup M_2$$

in der komplexen Zahlenebene.



Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie v_1 als Linearkombination der Vektoren v_2, v_3 und v_4 dar, d.h. bestimmen Sie Parameter $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ so, dass $v_1 = \alpha v_2 + \beta v_3 + \gamma v_4$.

$\alpha = \boxed{-3}$ $\quad \beta = \boxed{3}$ $\quad \gamma = \boxed{0}$

(b) Geben Sie die Dimension des Vektorraums $W = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ an. $\boxed{2}$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*)

Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden $g_1 : P + \lambda v\,, \lambda \in \mathbb{R}$, und $g_2 : Q + \mu w\,, \mu \in \mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^3$, wobei

$$P = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden: $\boxed{(2, 2, -3)^\intercal}$

(b) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene an, die die Geraden enthält.

$$\boxed{\tfrac{1}{5\sqrt{5}}(5x_1 + 8x_2 - 6x_3) = \tfrac{44}{5\sqrt{5}}}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{über } \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Ermitteln Sie, ob folgende Vektoren im Kern oder im Bild der linearen Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} v$$

liegen. Tragen Sie „ja“ oder „nein“ in die Kästen ein.

Vektor	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
im Kern?	ja	nein	nein	ja
im Bild?	nein	ja	nein	nein

Bestimmen Sie die Dimensionen von $\mathrm{Kern}\,(\alpha)$ und $\mathrm{Bild}\,(\alpha)$.

$\dim\,(\mathrm{Kern}\,(\alpha)) =$ $\boxed{2}$ $\dim\,(\mathrm{Bild}\,(\alpha)) =$ $\boxed{1}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Berechnen Sie zu den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

folgende Determinanten.

$\det(A) =$ $\boxed{6}$ $\det(B) =$ $\boxed{-8}$ $\det(A^{\mathsf{T}} B) =$ $\boxed{-48}$

Aufgabe 10 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2/3 & -5/3 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/2	/3	/3	/4	/6	/3	/4	/3	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Gegeben sei die folgende komplexe Zahl

$$w = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\,.$$

Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung $r\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ mit $0 \leqq r$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ für die folgenden komplexen Zahlen an.

$$w = \boxed{2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)} \qquad \frac{w^{11}}{2^{12}} = \boxed{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben sei folgendes Polynom

$$p(X) = X^3 + (\sqrt{6} - 2)X^2 + (2 - 2\sqrt{6})X - 4$$

Eine Nullstelle dieses Polynoms ist bei $z_1 = 2$. Bestimmen Sie das folgende Polynom:

$$\frac{p(X)}{X-2} = \boxed{X^2 + \sqrt{6}X + 2}$$

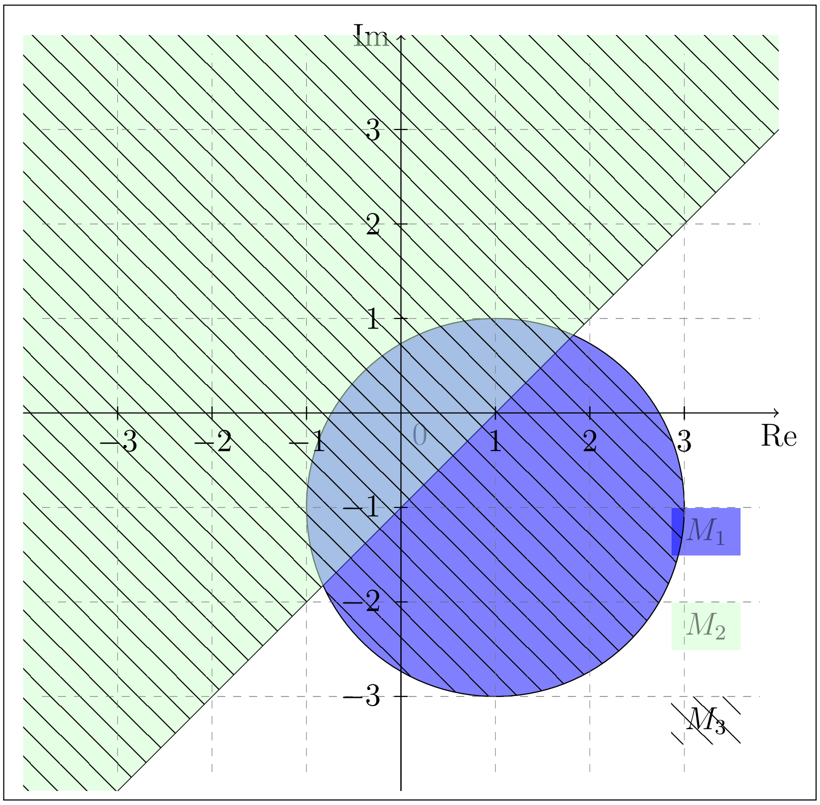
Berechnen Sie nun die restlichen Nullstellen des Polynoms p in $\mathbb{C}$.

$$z_2 = \boxed{-\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}} \qquad z_3 = \boxed{-\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 1 + \mathrm{i}| \leqq 2 \right\}, \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - \mathrm{i}| \leqq |z - 2 + \mathrm{i}| \right\} \quad \text{und} \quad M_3 = M_1 \cup M_2$$

in der komplexen Zahlenebene.



Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie v_1 als Linearkombination der Vektoren v_2, v_3 und v_4 dar, d.h. bestimmen Sie Parameter $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ so, dass $v_1 = \alpha v_2 + \beta v_3 + \gamma v_4$.

$\alpha = \boxed{-2}$ $\beta = \boxed{2}$ $\gamma = \boxed{0}$

(b) Geben Sie die Dimension des Vektorraums $W = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ an. $\boxed{2}$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*)

Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden $g_1 : P + \lambda v\,, \lambda \in \mathbb{R}\,,$ und $g_2 : Q + \mu w\,, \mu \in \mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^3$, wobei

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \; w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden: $\boxed{(4, -1, 2)^\intercal}$

(b) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene an, die die Geraden enthält.

$$\boxed{\tfrac{1}{3\sqrt{10}}(8x_1 - 1x_2 - 5x_3) = \tfrac{23}{3\sqrt{10}}}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{über } \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Ermitteln Sie, ob folgende Vektoren im Kern oder im Bild der linearen Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} v$$

liegen. Tragen Sie „ja“ oder „nein“ in die Kästen ein.

Vektor	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
im Kern?	nein	nein	ja	ja
im Bild?	ja	nein	nein	nein

Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern (α) und Bild (α).

$\dim(\text{Bild}(\alpha)) = \boxed{1}$ $\dim(\text{Kern}(\alpha)) = \boxed{2}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Berechnen Sie zu den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

folgende Determinanten.

$\det(A) = \boxed{-3}$ $\det(B) = \boxed{-5}$ $\det(A^\intercal B) = \boxed{15}$

Aufgabe 10 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/2 & -5/4 & -5/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$
