Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/2	/3	/3	/3	/5	/4	/3	/4	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-3)^{k+1}} = \boxed{-\frac{1}{4}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = \boxed{-1+e^2}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgende Grenzwerte.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{1-4x^2} = \boxed{-\frac{1}{2}} \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}} - 1\right) = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2}{1-4x^2} + 2^{\frac{1}{2x}}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie jeweils den Entwicklungspunkt z_0 und den Konvergenzradius ρ der folgenden Reihen.

	z_0	ρ
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{2^n n}$	-2	2
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{(2n)!}$	1	∞

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto e^{\cos(2x)}\,.$$

Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von f.

$$f'(x) = \boxed{-2e^{\cos(2x)}\sin(2x)}$$

$$f''(x) = \boxed{4e^{\cos(2x)}\left((\sin(2x))^2 - \cos(2x)\right)}$$

Stellen Sie das in $x_0 = \frac{\pi}{4}$ entwickelte Taylorpolynom zweiter Stufe $T_2\left(f,\, x,\, \frac{\pi}{4}\right)$ auf.

$$T_2\left(f,\, x,\, \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{1 - 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Geben Sie die Partialbruchzerlegung an

$$\frac{7-x}{x^2+x-6} = \boxed{\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+3}}$$

Berechnen Sie folgende Integrale

$$\int \frac{7-x}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\Big[\ln|x-2| - 2\ln|x+3|\Big]}$$

$$\int x^2 \ln(3x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[-\frac{x^3}{9} + \frac{x^3}{3}\ln(3x)\right]}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x+y+4$$

unter Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ mit

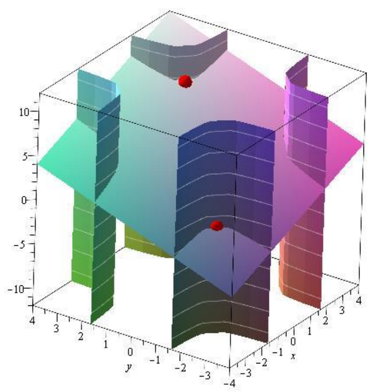
$$g: (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\,.$$

Berechnen Sie den Gradienten von f und g:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad \operatorname{grad} g(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{\dfrac{2}{x^3}} \\ \boxed{\dfrac{2}{y^3}} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Stellen, an denen die Funktion unter der Nebenbedingung ihre Maxima und Minima annimmt, sowie die Funktionswerte an diesen Stellen.

Stelle	Funktionswert	Typ
$(-2,-2)$	0	relatives Maximum
weil die Nebenbedingung eine nicht kompakte Menge beschreibt, können die Funktionswerte an relativen Minima ***größer*** *sein als die bei den relativen Maxima — und das passiert hier auch!*		
$(2,2)$	8	relatives Minimum



Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale. Falls das uneigentliche Integral nicht existiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\int \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[-2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right]}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\text{divergent}}$$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie eine Parametrisierung $C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ der geraden Strecke vom Punkt $(2,1)$ zum Punkt $(4,2)$.

$$C(t) = \left(\boxed{\begin{matrix} 2t+2 \\ t+1 \end{matrix}}\right), \quad t \in [0,1]\,.$$

Berechnen Sie $C'(t) = \left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}}\right)$ und die folgenden Kurvenintegrale

für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (u,v) \mapsto 2u - v$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ -2v \end{pmatrix}$

$$\int_C f(s)\,\mathrm{d}\,s = \boxed{\frac{9\sqrt{5}}{2}} \qquad \int_C g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{3}$$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3e^{\alpha x}y^2 + \ln y \\ 2e^{\alpha x}y + \dfrac{x}{y} \end{pmatrix}.$$

ein Potential?

$$\boxed{\alpha = 3}$$

Bestimmen Sie für diese α ein Potential U.

$$U(x,y) = \boxed{e^{3x}y^2 + x\ln y}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/2	/3	/3	/3	/5	/4	/3	/4	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Gruppennr.:** ☐

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-5)^{k+1}}{k!} = \boxed{-\frac{5}{e^5}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgende Grenzwerte.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-1}{1-4x^3} = \boxed{-\frac{1}{4}} \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sin x}{e^x}+2\right) = \boxed{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-1}{1-4x^3}+3^{\frac{1}{x}}\right) = \boxed{\frac{3}{4}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie jeweils den Entwicklungspunkt z_0 und den Konvergenzradius ρ der folgenden Reihen.

	z_0	ρ
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{(3n)!}$	2	∞
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n n}$	-1	2

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto e^{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von f.

$$f'(x) = \boxed{\tfrac{1}{2} e^{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$f''(x) = \boxed{\tfrac{1}{4} e^{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$$

Stellen Sie das in $x_0 = 2\pi$ entwickelte Taylorpolynom zweiter Stufe $T_2(f,\, x,\, 2\pi)$ auf.

$$T_2(f,\, x,\, 2\pi) = \boxed{1 - \frac{1}{2}(x-2\pi) + \frac{1}{8}(x-2\pi)^2}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Geben Sie die Partialbruchzerlegung an

$$\frac{x+5}{x^2-2x-3} = \boxed{\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+1}}$$

Berechnen Sie folgende Integrale

$$\int \frac{x+5}{x^2-2x-3}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\Big[2\ln|x-3| - \ln|x+1|\Big]}$$

$$\int x^{-3}\ln(2x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[-\frac{1}{4x^2} - \frac{\ln(2x)}{2x^2}\right]}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto x + 2y - 3$$

unter Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ mit

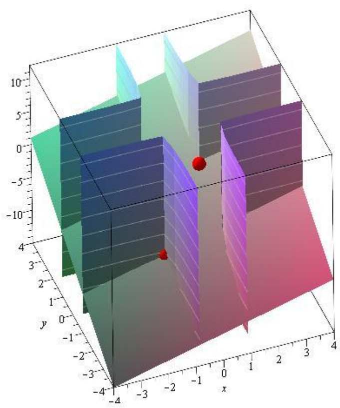
$$g : (\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}) \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{3}{2}\,.$$

Berechnen Sie den Gradienten von f und g:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{pmatrix} \qquad \operatorname{grad} g(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{-\frac{1}{x^3}} \\ \boxed{-\frac{2}{y^3}} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Stellen, an denen die Funktion unter der Nebenbedingung ihre Maxima und Minima annimmt, sowie die Funktionswerte an diesen Stellen.

Stelle	Funktionswert	Typ
$(-1,-1)$	-6	relatives Maximum
weil die Nebenbedingung eine nicht kompakte Menge beschreibt, können die Funktionswerte an relativen Minima ***größer*** *sein als die bei den relativen Maxima — und das passiert hier auch!*		
$(1,1)$	0	relatives Minimum



Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale. Falls das uneigentliche Integral nicht existiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\int \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{1}{2}\ln|\sin(2x)|\right]} \qquad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\text{divergent}}$$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie eine Parametrisierung $C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ der geraden Strecke vom Punkt $(1,1)$ zum Punkt $(3,0)$.

$$C(t) = \left(\boxed{\begin{matrix} 2t+1 \\ 1-t \end{matrix}}\right), \quad t \in [0,1]\,.$$

Berechnen Sie $C'(t) = \left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}}\right)$ und die folgenden Kurvenintegrale

für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (u,v) \mapsto 3u+v$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} -u \\ 2v \end{pmatrix}$

$$\int_C f(s)\,\mathrm{d}\,s = \boxed{\frac{13\sqrt{5}}{2}} \qquad \int_C g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{-5}$$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{\alpha x}y + 2x\ln y \\ e^{\alpha x} + \dfrac{x^2}{y} \end{pmatrix}.$$

ein Potential?

$$\boxed{\alpha = 2}$$

Bestimmen Sie für diese α ein Potential U.

$$U(x,y) = \boxed{e^{2x}y + x^2\ln y}$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/2	/3	/3	/3	/5	/4	/3	/4	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-2)^{k+1}} = \boxed{-\frac{1}{3}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k!} = \boxed{-1+e^4}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgende Grenzwerte.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{1-3x^4} = \boxed{-\frac{1}{3}} \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\cos x}{\ln x} - 3\right) = \boxed{-3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^4}{1-3x^4} + 4^{\frac{1}{4x}}\right) = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie jeweils den Entwicklungspunkt z_0 und den Konvergenzradius ρ der folgenden Reihen.

	z_0	ρ
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n n}$	1	3
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(2n)!}$	-2	∞

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto e^{\sin(2x)}\,.$$

Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von f.

$$f'(x) = \boxed{2e^{\sin(2x)}\cos(2x)}$$

$$f''(x) = \boxed{4e^{\sin(2x)}\left((\cos(2x))^2 - \sin(2x)\right)}$$

Stellen Sie das in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ entwickelte Taylorpolynom zweiter Stufe $T_2\left(f, x, \frac{\pi}{2}\right)$ auf.

$$T_2\left(f, x, \frac{\pi}{2}\right) = \boxed{1 - 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Geben Sie die Partialbruchzerlegung an

$$\frac{x-8}{x^2-x-6} = \boxed{\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-3}}$$

Berechnen Sie folgende Integrale

$$\int \frac{x-8}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\Big[2\ln|x+2| - \ln|x-3|\Big]}$$

$$\int x^3\ln(2x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[-\frac{x^4}{16} + \frac{x^4}{4}\ln(2x)\right]}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x+y-4$$

unter Nebenbedingung $g(x,y)=0$ mit

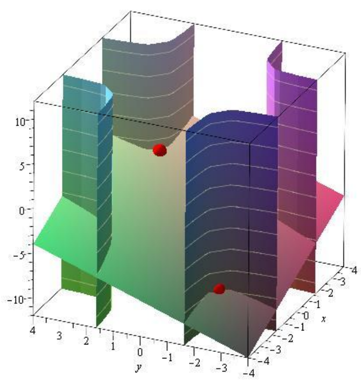
$$g:(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \to \mathbb{R}\colon (x,y)\mapsto 1-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{y^2}\,.$$

Berechnen Sie den Gradienten von f und g:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad \operatorname{grad} g(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{4}{x^3}} \\ \boxed{\frac{4}{y^3}} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Stellen, an denen die Funktion unter der Nebenbedingung ihre Maxima und Minima annimmt, sowie die Funktionswerte an diesen Stellen.

<table>
<tr><th>Stelle</th><th>Funktionswert</th><th>Typ</th></tr>
<tr><td>$(-2,-2)$</td><td>-8</td><td>relatives Maximum</td></tr>
<tr><td colspan="3">weil die Nebenbedingung eine nicht kompakte Menge beschreibt, können die Funktionswerte an relativen Minima größer sein als die bei den relativen Maxima — und das passiert hier auch!</td></tr>
<tr><td>$(2,2)$</td><td>0</td><td>relatives Minimum</td></tr>
</table>



Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale. Falls das uneigentliche Integral nicht existiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\int \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[-\frac{1}{2}\ln|\cos(2x)|\right]}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\text{divergent}}$$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie eine Parametrisierung $C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ der geraden Strecke vom Punkt $(0,1)$ zum Punkt $(2,2)$.

$$C(t) = \left(\boxed{\begin{matrix} 2t \\ t+1 \end{matrix}}\right), \quad t \in [0,1].$$

Berechnen Sie $C'(t) = \left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}}\right)$ und die folgenden Kurvenintegrale

für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (u,v) \mapsto u+3v$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ -2v \end{pmatrix}$

$$\int_C f(s)\,\mathrm{d}\,s = \boxed{\frac{11\sqrt{5}}{2}} \qquad \int_C g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{-1}$$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{\alpha x}y^2 + 2x\ln y \\ 2e^{\alpha x}y + \dfrac{x^2}{y} \end{pmatrix}.$$

ein Potential?

$$\boxed{\alpha = 1}$$

Bestimmen Sie für diese α ein Potential U.

$$U(x,y) = \boxed{e^x y^2 + x^2 \ln y}$$

Name, Vorname:

Matrikel-Nummer:

Studien-gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/2	/3	/3	/3	/5	/4	/3	/4	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{k+1}}{k!} = \boxed{-\frac{3}{e^3}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgende Grenzwerte.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^3}{5x^3+2} = \boxed{-\frac{1}{5}} \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sin x}{2^x}+4\right) = \boxed{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1-x^3}{5x^3+2}+5^{\frac{1}{x}}\right) = \boxed{\frac{4}{5}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie jeweils den Entwicklungspunkt z_0 und den Konvergenzradius ρ der folgenden Reihen.

	z_0	ρ
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{(3n)!}$	-3	∞
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{3^n n}$	2	3

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\,.$$

Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von f.

$$f'(x) = \boxed{-\tfrac{1}{2}e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$f''(x) = \boxed{\tfrac{1}{4}e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$$

Stellen Sie das in $x_0=\pi$ entwickelte Taylorpolynom zweiter Stufe $T_2\,(f,\,x,\,\pi)$ auf.

$$T_2\,(f,\,x,\,\pi) = \boxed{1-\frac{1}{2}(x-\pi)+\frac{1}{8}(x-\pi)^2}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Geben Sie die Partialbruchzerlegung an

$$\frac{2x+7}{x^2+x-2} = \boxed{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}}$$

Berechnen Sie folgende Integrale

$$\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\Big[3\ln|x-1| - \ln|x+2| \Big]}$$

$$\int x^{-2}\ln(3x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[-\frac{1}{x} - \frac{\ln(3x)}{x} \right]}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto 2x + y + 3$$

unter Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ mit

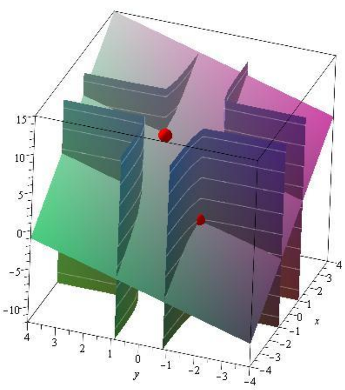
$$g : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto \frac{3}{2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2y^2}\,.$$

Berechnen Sie den Gradienten von f und g:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad \operatorname{grad} g(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{2}{x^3}} \\ \boxed{\frac{1}{y^3}} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Stellen, an denen die Funktion unter der Nebenbedingung ihre Maxima und Minima annimmt, sowie die Funktionswerte an diesen Stellen.

<table>
<tr><th>Stelle</th><th>Funktionswert</th><th>Typ</th></tr>
<tr><td>$(-1,-1)$</td><td>0</td><td>relatives Maximum</td></tr>
<tr><td colspan="3">weil die Nebenbedingung eine nicht kompakte Menge beschreibt,
können die Funktionswerte an relativen Minima größer sein
als die bei den relativen Maxima — und das passiert hier auch!</td></tr>
<tr><td>$(1,1)$</td><td>6</td><td>relatives Minimum</td></tr>
</table>



Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale. Falls das uneigentliche Integral nicht existiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\int \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[2\ln\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right]}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\text{divergent}}$$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie eine Parametrisierung $C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ der geraden Strecke vom Punkt $(1,2)$ zum Punkt $(3,1)$.

$$C(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ 2-t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]\,.$$

Berechnen Sie $C'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und die folgenden Kurvenintegrale

für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (u,v) \mapsto 2u+v$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} -u \\ 2v \end{pmatrix}$

$$\int_C f(s)\,\mathrm{d}\,s = \boxed{\frac{11\sqrt{5}}{2}} \qquad \int_C g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{-7}$$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{\alpha x}y + 3x^2 \ln y \\ e^{\alpha x} + \dfrac{x^3}{y} \end{pmatrix}.$$

ein Potential?

$$\boxed{\alpha = 2}$$

Bestimmen Sie für diese α ein Potential U.

$$U(x,y) = \boxed{e^{2x}y + x^3 \ln y}$$