| **Name, Vorname:** | | **Matrikel-Nummer:** | | **Studien-gang:** | |
|---|---|---|---|---|---|

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /3 | /4 | /2 | /5 | /7 | /4 | /3 | /2 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

| $f(x)$ | $x^a$ | $e^x$ | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $a\,x^{a-1}$ | $e^x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $f(x)$ | $b^x$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $\ln(b)\,b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

*Viel Erfolg!*

---

**Aufgabe 1** (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

| **Name des Tutors/der Tutorin:** | | **Gruppennr.:** | |
|---|---|---|---|

**Aufgabe 2** (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

| | $\sum_{\ell=3}^{\infty} \left(\frac{z-2}{\ell+2}\right)^{\ell}$ | $\sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-1)^m}{5m+1}(z+3-\mathrm{i})^m$ | $\sum_{n=3}^{\infty} 3^n \left(\frac{1}{2}z - \mathrm{i}\right)^n$ |
|---|---|---|---|
| $z_0$ | $2$ | $-3+\mathrm{i}$ | $2\mathrm{i}$ |
| $\rho$ | $+\infty$ | $1$ | $\frac{2}{3}$ |

**Aufgabe 3** (*4 Punkte*)

Es sind die folgenden Funktionen gegeben:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2\cosh\left(\sqrt{2}\,x\right) - 2 \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1 - \cos(x)\,.$$

**(a)** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{4}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{f(x)} = \boxed{\sqrt{2}}$$

**(b)** Bestimmen Sie die folgende Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\, f\left(g(x)\right) = \boxed{2\sqrt{2}\,\sin(x)\,\sinh\left(\sqrt{2}\left(1-\cos(x)\right)\right)}\,.$$

**Aufgabe 4** (*2 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 4x^2 - (x - 8x^2)\ln(x)$$

**(a)** Bestimmen Sie die erste Ableitung von $f$.

$$f'(x) = \boxed{(1+\ln(x))\,(16x-1)}$$

**(b)** Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von $f$.

$$\boxed{e^{-1},\ \frac{1}{16}}$$

**Aufgabe 5** (*5 Punkte*) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\frac{1}{24}}$$

$$\int 2x\exp(3x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\tfrac{2}{3}\exp(3x)(x-\tfrac{1}{3})\right]}$$

$$\int 6x\sin(3x^2)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[-\cos(3x^2)\right]}$$

$$\int_1^2 7^x\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\frac{42}{\ln(7)}}$$

---

**Aufgabe 6** (*7 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2(y+1) + y^3 + 3y^2 + 2y\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von $f$.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{2x(y+1)} \\ \boxed{x^2+3y^2+6y+2} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{2y+2} & \boxed{2x} \\ \boxed{2x} & \boxed{6y+6} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen von $f$ und deren Typ an.

| kritische Stelle | Typ |
|---|---|
| $(0, -1+\sqrt{1/3})$ | lokales Minimum |
| $(0, -1-\sqrt{1/3})$ | lokales Maximum |
| $(1, -1)$ | Sattelpunkt |
| $(-1, -1)$ | Sattelpunkt |

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Stufe zum Entwicklungspunkt $(0, -2)$:

$$T_2(f, (x,y), (0,-2)) = \boxed{2(y+2) - x^2 - 3(y+2)^2}$$

---

**Aufgabe 7** (*4 Punkte*) Gegeben ist die Potenzreihe

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(n-1)!} x^{2n-1} .$$

**(a)** Geben Sie die Stammfunktion $F$ von $f$ mit $F(0) = 0$ als Potenzreihe an.

$$F(x) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(-4)^n}{n!} x^{2n}}$$

**(b)** Geben Sie $F$ aus **(a)** in geschlossener Form an.

$$F(x) = \boxed{\frac{1}{2} \exp\left(-4x^2\right) - \frac{1}{2}}$$

**(c)** Berechnen Sie daraus eine geschlossene Form von $f$.

$$f(x) = \boxed{-4x \exp\left(-4x^2\right)}$$

**Aufgabe 8** (*3 Punkte*) Gegeben sei das vom reellen Parameter $\alpha$ abhängige Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{xy}\left(3xy + 7y^2 + 3\right) \\ e^{xy}\left(3x^2 + \alpha xy + 7\right) \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die folgenden Ableitungen der Komponentenfunktionen $f_1$ und $f_2$:

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y) = \boxed{e^{xy}\left(3x^2y + 7xy^2 + 6x + 14y\right)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y) = \boxed{e^{xy}\left(3x^2y + \alpha xy^2 + 6x + 7y + \alpha y\right)}$$

Bestimmen Sie die Werte von $\alpha$, für die $f$ ein Potential besitzt.

$$\boxed{\alpha = 7}$$

**Aufgabe 9** (*2 Punkte*) Ermitteln Sie drei verschiedene Häufungspunkte der Folge

$$\left(-5 \sin\left(n\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}} .$$

$$\boxed{-5\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \boxed{0} \qquad \boxed{5\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

| **Name, Vorname:** | | **Matrikel-Nummer:** | | **Studien-gang:** | |
|---|---|---|---|---|---|

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /3 | /4 | /2 | /5 | /7 | /4 | /3 | /2 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

| $f(x)$ | $x^a$ | $e^x$ | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $a\,x^{a-1}$ | $e^x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $f(x)$ | $b^x$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $\ln(b)\,b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

*Viel Erfolg!*

---

**Aufgabe 1** (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

**Name des Tutors/der Tutorin:** | **Gruppennr.:**

**Aufgabe 2** (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

| | $\sum_{\ell=3}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{7\ell+1}(z-3)^\ell$ | $\sum_{m=3}^{\infty} 4^m \left(\frac{1}{3}z + \mathrm{i}\right)^m$ | $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{z+2-\mathrm{i}}{n+1}\right)^n$ |
|---|---|---|---|
| $z_0$ | $3$ | $-3\mathrm{i}$ | $-2+\mathrm{i}$ |
| $\rho$ | $1$ | $\frac{3}{4}$ | $+\infty$ |

**Aufgabe 3** (*4 Punkte*)

Es sind die folgenden Funktionen gegeben:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2\cosh\left(\sqrt{3}\,x\right) - 2 \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1 - \cos(x)\,.$$

**(a)** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{6}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{f(x)} = \boxed{\sqrt{3}}$$

**(b)** Bestimmen Sie die folgende Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\, f\left(g(x)\right) = \boxed{2\sqrt{3}\,\sin(x)\,\sinh\left(\sqrt{3}\left(1-\cos(x)\right)\right)}\,.$$

**Aufgabe 4** (*2 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (9x^2 - x)\ln(x) + \frac{9}{2}x^2$$

**(a)** Bestimmen Sie die erste Ableitung von $f$.

$$f'(x) = \boxed{(1+\ln(x))\,(18x-1)}$$

**(b)** Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von $f$.

$$\boxed{e^{-1},\ \frac{1}{18}}$$

**Aufgabe 5** (*5 Punkte*) Berechnen Sie

| | | |
|---|---|---|
| $\int_5^{+\infty} -\frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$ | $=$ | $-\frac{2}{5}$ |
| $\int 3x\exp(2x)\,\mathrm{d}\,x$ | $=$ | $\left[\frac{3}{2}\exp(2x)(x-\frac{1}{2})\right]$ |
| $\int 6x^2\cos(2x^3)\,\mathrm{d}\,x$ | $=$ | $\left[\sin(2x^3)\right]$ |
| $\int_1^3 2^x\,\mathrm{d}\,x$ | $=$ | $\frac{6}{\ln(2)}$ |

---

**Aufgabe 6** (*7 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto y^2(x+1) + x^3 + 3x^2 + 2x\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von $f$.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{y^2+3x^2+6x+2} \\ \boxed{2y(x+1)} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{6x+6} & \boxed{2y} \\ \boxed{2y} & \boxed{2x+2} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen von $f$ und deren Typ an.

| kritische Stelle | Typ |
|---|---|
| $(-1+\sqrt{1/3},0)$ | lokales Minimum |
| $(-1-\sqrt{1/3},0)$ | lokales Maximum |
| $(-1,1)$ | Sattelpunkt |
| $(-1,-1)$ | Sattelpunkt |

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Stufe zum Entwicklungspunkt $(-2,0)$:

$$T_2(f,(x,y),(-2,0)) = \boxed{2(x+2) - 3(x+2)^2 - y^2}$$

---

**Aufgabe 7** (*4 Punkte*) Gegeben ist die Potenzreihe

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(n-1)!}x^{2n-1}\,.$$

**(a)** Geben Sie die Stammfunktion $F$ von $f$ mit $F(0)=0$ als Potenzreihe an.

$$F(x) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(-2)^n}{n!}x^{2n}}$$

**(b)** Geben Sie $F$ aus **(a)** in geschlossener Form an.

$$F(x) = \boxed{\frac{1}{2}\exp\left(-2x^2\right)-\frac{1}{2}}$$

**(c)** Berechnen Sie daraus eine geschlossene Form von $f$.

$$f(x) = \boxed{-2x\exp\left(-2x^2\right)}$$

**Aufgabe 8** (*3 Punkte*) Gegeben sei das vom reellen Parameter $\alpha$ abhängige Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{xy}\left(3xy+6y^2+3\right)\\ \mathrm{e}^{xy}\left(3x^2+\alpha xy+6\right)\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Ableitungen der Komponentenfunktionen $f_1$ und $f_2$:

$$\frac{\partial}{\partial y}f_1(x,y) = \boxed{\mathrm{e}^{xy}\left(3x^2y+6xy^2+6x+12y\right)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f_2(x,y) = \boxed{\mathrm{e}^{xy}\left(3x^2y+\alpha xy^2+6x+6y+\alpha y\right)}$$

Bestimmen Sie die Werte von $\alpha$, für die $f$ ein Potential besitzt.

$$\boxed{\alpha = 6}$$

**Aufgabe 9** (*2 Punkte*) Ermitteln Sie drei verschiedene Häufungspunkte der Folge

$$\left(-3\sin\left(n\frac{\pi}{3}-\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

$\boxed{-3\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{3\frac{\sqrt{3}}{2}}$

| **Name, Vorname:** | | **Matrikel-Nummer:** | | **Studien-gang:** | |
|---|---|---|---|---|---|

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /3 | /4 | /2 | /5 | /7 | /4 | /3 | /2 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

| $f(x)$ | $x^a$ | $e^x$ | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $a\,x^{a-1}$ | $e^x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $f(x)$ | $b^x$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $\ln(b)\,b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

*Viel Erfolg!*

---

**Aufgabe 1** (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

**Name des Tutors/der Tutorin:** | **Gruppennr.:**

**Aufgabe 2** (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

| | $\sum_{\ell=3}^{\infty} \left(\frac{z-4}{\ell-2}\right)^{\ell}$ | $\sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-1)^m}{5m+1}(z+1-2\mathrm{i})^m$ | $\sum_{n=3}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{5}z - \mathrm{i}\right)^n$ |
|---|---|---|---|
| $z_0$ | $4$ | $-1+2\mathrm{i}$ | $5\mathrm{i}$ |
| $\rho$ | $+\infty$ | $1$ | $\frac{5}{2}$ |

**Aufgabe 3** (*4 Punkte*)

Es sind die folgenden Funktionen gegeben:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2\cosh\left(\sqrt{5}\,x\right) - 2 \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1 - \cos(x)\,.$$

**(a)** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{10}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \sqrt{5}\,\mathrm{e}^{f(x)} = \boxed{\sqrt{5}}$$

**(b)** Bestimmen Sie die folgende Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f\left(g(x)\right) = \boxed{2\sqrt{5}\,\sin(x)\,\sinh\left(\sqrt{5}\left(1-\cos(x)\right)\right)}\,.$$

**Aufgabe 4** (*2 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 3x^2 - (x - 6x^2)\ln(x)$$

**(a)** Bestimmen Sie die erste Ableitung von $f$.

$$f'(x) = \boxed{(1+\ln(x))\,(12x-1)}$$

**(b)** Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von $f$.

$$\boxed{e^{-1},\ \frac{1}{12}}$$

**Aufgabe 5** (*5 Punkte*) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{3}{x^5}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{-\frac{3}{4}}$$

$$\int 5x\exp(4x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\tfrac{5}{4}\exp(4x)(x-\tfrac{1}{4})\right]}$$

$$\int 6x\cosh(3x^2)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\sinh(3x^2)\right]}$$

$$\int_1^2 5^x\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\frac{20}{\ln(5)}}$$

**Aufgabe 6** (*7 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2(y-1) + y^3 - 3y^2 + 2y\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von $f$.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{2x(y-1)} \\ \boxed{x^2+3y^2-6y+2} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{2y-2} & \boxed{2x} \\ \boxed{2x} & \boxed{6y-6} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen von $f$ und deren Typ an.

| kritische Stelle | Typ |
|---|---|
| $(0, 1+\sqrt{1/3})$ | lokales Minimum |
| $(0, 1-\sqrt{1/3})$ | lokales Maximum |
| $(1,1)$ | Sattelpunkt |
| $(-1,1)$ | Sattelpunkt |

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Stufe zum Entwicklungspunkt $(0,2)$:

$$T_2(f,(x,y),(0,2)) = \boxed{2(y-2) + x^2 + 3(y-2)^2}$$

**Aufgabe 7** (*4 Punkte*) Gegeben ist die Potenzreihe

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(n-1)!} x^{2n-1} .$$

**(a)** Geben Sie die Stammfunktion $F$ von $f$ mit $F(0) = 0$ als Potenzreihe an.

$$F(x) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(-3)^n}{n!} x^{2n}}$$

**(b)** Geben Sie $F$ aus **(a)** in geschlossener Form an.

$$F(x) = \boxed{\frac{1}{2} \exp\left(-3x^2\right) - \frac{1}{2}}$$

**(c)** Berechnen Sie daraus eine geschlossene Form von $f$.

$$f(x) = \boxed{-3x \exp\left(-3x^2\right)}$$

---

**Aufgabe 8** (*3 Punkte*) Gegeben sei das vom reellen Parameter $\alpha$ abhängige Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{xy}\left(3xy + 9y^2 + 3\right) \\ e^{xy}\left(3x^2 + \alpha xy + 9\right) \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die folgenden Ableitungen der Komponentenfunktionen $f_1$ und $f_2$:

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y) = \boxed{e^{xy}\left(3x^2y + 9xy^2 + 6x + 18y\right)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y) = \boxed{e^{xy}\left(3x^2y + \alpha xy^2 + 6x + 9y + \alpha y\right)}$$

Bestimmen Sie die Werte von $\alpha$, für die $f$ ein Potential besitzt.

$$\boxed{\alpha = 9}$$

---

**Aufgabe 9** (*2 Punkte*) Ermitteln Sie drei verschiedene Häufungspunkte der Folge

$$\left(5 \sin\left(n\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} .$$

$\boxed{-5\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{5\frac{\sqrt{3}}{2}}$

---

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Name, Vorname:** | | **Matrikel-Nummer:** | | **Studiengang:** | |

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /3 | /4 | /2 | /5 | /7 | /4 | /3 | /2 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

| $f(x)$ | $x^a$ | $e^x$ | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $a\,x^{a-1}$ | $e^x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $f(x)$ | $b^x$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $\ln(b)\,b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

*Viel Erfolg!*

---

**Aufgabe 1** (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Name des Tutors/der Tutorin:** | | **Gruppennr.:** | |

**Aufgabe 2** (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

| | $\sum_{\ell=3}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{7\ell+1}(z-5)^\ell$ | $\sum_{m=3}^{\infty} 5^m \left(\frac{1}{4}z+\mathrm{i}\right)^m$ | $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{z-2+\mathrm{i}}{n-1}\right)^n$ |
|---|---|---|---|
| $z_0$ | $5$ | $-4\mathrm{i}$ | $2-\mathrm{i}$ |
| $\rho$ | $1$ | $\frac{4}{5}$ | $+\infty$ |

---

**Aufgabe 3** (*4 Punkte*)

Es sind die folgenden Funktionen gegeben:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2\cosh\left(\sqrt{7}\,x\right) - 2 \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1-\cos(x)\,.$$

**(a)** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{14}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \sqrt{7}\,\mathrm{e}^{f(x)} = \boxed{\sqrt{7}}$$

**(b)** Bestimmen Sie die folgende Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\, f\left(g(x)\right) = \boxed{2\sqrt{7}\,\sin(x)\,\sinh\left(\sqrt{7}\left(1-\cos(x)\right)\right)}\,.$$

---

**Aufgabe 4** (*2 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (7x^2 - x)\ln(x) + \frac{7}{2}x^2$$

**(a)** Bestimmen Sie die erste Ableitung von $f$.

$$f'(x) = \boxed{(1+\ln(x))\,(14x-1)}$$

**(b)** Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von $f$.

$$\boxed{e^{-1},\ \frac{1}{14}}$$

---

**Aufgabe 5** (*5 Punkte*) Berechnen Sie

$$\int_4^{+\infty} -\frac{4}{x^3}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{-\frac{1}{8}}$$

$$\int 4x\exp(7x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\tfrac{4}{7}\exp(7x)(x-\tfrac{1}{7})\right]}$$

$$\int 6x^2\sinh(2x^3)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\cosh(2x^3)\right]}$$

$$\int_1^3 3^x\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\frac{24}{\ln(3)}}$$

---

**Aufgabe 6** (*7 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto y^2(x-1) + x^3 - 3x^2 + 2x\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von $f$.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{y^2+3x^2-6x+2} \\ \boxed{2y(x-1)} \end{pmatrix},\ \mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{6x-6} & \boxed{2y} \\ \boxed{2y} & \boxed{2x-2} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen von $f$ und deren Typ an.

| kritische Stelle | Typ |
|---|---|
| $(1+\sqrt{1/3},0)$ | lokales Minimum |
| $(1-\sqrt{1/3},0)$ | lokales Maximum |
| $(1,1)$ | Sattelpunkt |
| $(1,-1)$ | Sattelpunkt |

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Stufe zum Entwicklungspunkt $(2,0)$:

$$T_2(f,(x,y),(2,0)) = \boxed{2(x-2)+3(x-2)^2+y^2}$$

---

**Aufgabe 7** (*4 Punkte*) Gegeben ist die Potenzreihe

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{(n-1)!} x^{2n-1}.$$

**(a)** Geben Sie die Stammfunktion $F$ von $f$ mit $F(0) = 0$ als Potenzreihe an.

$$F(x) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(-5)^n}{n!} x^{2n}}$$

**(b)** Geben Sie $F$ aus **(a)** in geschlossener Form an.

$$F(x) = \boxed{\frac{1}{2} \exp\left(-5x^2\right) - \frac{1}{2}}$$

**(c)** Berechnen Sie daraus eine geschlossene Form von $f$.

$$f(x) = \boxed{-5x \exp\left(-5x^2\right)}$$

---

**Aufgabe 8** (*3 Punkte*) Gegeben sei das vom reellen Parameter $\alpha$ abhängige Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{xy}\left(3xy + 8y^2 + 3\right) \\ e^{xy}\left(3x^2 + \alpha xy + 8\right) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Ableitungen der Komponentenfunktionen $f_1$ und $f_2$:

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y) = \boxed{e^{xy}\left(3x^2y + 8xy^2 + 6x + 16y\right)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y) = \boxed{e^{xy}\left(3x^2y + \alpha xy^2 + 6x + 8y + \alpha y\right)}$$

Bestimmen Sie die Werte von $\alpha$, für die $f$ ein Potential besitzt.

$$\boxed{\alpha = 8}$$

---

**Aufgabe 9** (*2 Punkte*) Ermitteln Sie drei verschiedene Häufungspunkte der Folge

$$\left(3 \sin\left(n\frac{\pi}{3} - \frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

$\boxed{-3\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{3\frac{\sqrt{3}}{2}}$

---