Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/6	/4	/5	/3	/3	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{xy}\,(3xy + 11y^2 + 3) \\ \mathrm{e}^{xy}\,(3x^2 + 11xy + 11) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential von f.

$$\mathrm{e}^{xy}\,(3x + 11y)$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{(\ell+1)!}{3(-1)^\ell}(z-\mathrm{i})^\ell$	$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{7^m}(3z-2)^m$	$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{z-3+2\mathrm{i}}{1-n^2}\right)^n$
z_0	i	$\frac{2}{3}$	$3-2\mathrm{i}$
ρ	0	$\frac{7}{3}$	∞

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Berechnen Sie

$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x) + 5x^4 \,\mathrm{d}\,x \ =$	$2\pi^5$
$\int \frac{9x^2\sin(3x^3)}{\cos(3x^3)} \,\mathrm{d}\,x \ =$	$\left[-\ln(\lvert\cos(3x^3)\rvert)\right]$
$\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2} \,\mathrm{d}\,x \ =$	$\left[\frac{1}{2}(\arctan(x))^2\right]$
$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} \,\mathrm{d}\,x \ =$	$\frac{3\pi^2}{32}$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Potenzreihe

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-3)^n}{(2n-1)!} x^{4n-1}.$$

(a) Geben Sie die Stammfunktion F von f mit $F(0) = 1$ als Potenzreihe an.

$$F(x) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n)!} x^{4n}}$$

(b) Geben Sie F aus **(a)** in geschlossener Form an.

$$F(x) = \boxed{\cos\left(\sqrt{3}x^2\right)}$$

(c) Berechnen Sie daraus eine geschlossene Form von f.

$$f(x) = \boxed{-2\sqrt{3}x\,\sin\left(\sqrt{3}x^2\right)}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto y - x^2\,, \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + y^2\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Gradienten von f und g.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{-2x} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{grad} g(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{2x} \\ \boxed{2y} \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 4$.
Geben Sie jeweils auch den Funktionswert und den Typ des Extremums an.

Extremstelle	Funktionswert	Typ
$(0,-2)$	-2	(lokales) Maximum
$(0,2)$	2	(globales) Maximum
$(-\sqrt{15}/2, -1/2)$	$-17/4$	(globales) Minimum
$(\sqrt{15}/2, -1/2)$	$-17/4$	(globales) Minimum

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Es sind die folgenden Funktionen gegeben:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2\,\cosh\big(2\sqrt{2}\,x\big) - 2 \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1 - \cos(x)\,.$$

(a) Bestimmen Sie die folgende Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\, f\,(g(x)) = \boxed{4\sqrt{2}\,\sin(x)\,\sinh\Big(2\sqrt{2}\,\big(1-\cos(x)\big)\Big)}$$

(b) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{16}$$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben sind die Kurve K durch die Parametrisierung

$$C\colon [-1,2] \to \mathbb{R}^3 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

und das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 x_3^4 \\ 3x_1 - (1+2x_3)x_2^3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

$$f(C(t)) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ t^4 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 3t^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

und das Kurvenintegral

$$\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{\frac{33}{5}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)+2}$$

(a) Bestimmen Sie die erste Ableitung von f.

$$f'(x) = \boxed{\frac{1+2\cos(x)}{(2+\cos(x))^2}}$$

(b) Bestimmen Sie alle Extremstellen von f.

Geben Sie jeweils auch den Funktionswert und den Typ des Extremums an.

Extremstelle	Funktionswert	Typ
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	(globales) Maximum
0	0	(globales) Minimum
π	0	(globales) Minimum
