Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/3	/6	/4	/5	/2	/4	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: \quad x\mapsto x\mathrm{e}^{x^2+2x+2}$$

die erste Ableitung und das Taylorpolynom der Stufe 1 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$f'(x) = \boxed{(2x^2+2x+1)\mathrm{e}^{x^2+2x+2}}$$

$$T_1(f,x,0) = \boxed{\mathrm{e}^2 x}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0\in\mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho\in\mathbb{R}_0^+\cup\{+\infty\}$.

	$\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(z-12)^k}{7^k}$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{7+(-1)^k}{5}\right)^k(z+2\mathrm{i})^k$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty}3^k\left(\frac{1}{4}z-\mathrm{i}\right)^k$
z_0	12	$-2\mathrm{i}$	$4\mathrm{i}$
ρ	7	$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{3}$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int\Big((\cosh(x))^2+2\Big)\,\mathrm{d}\,x$	$\left[\frac{1}{2}\sinh(x)\cosh(x)+\frac{5}{2}x\right]$
$\int\frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{2+(\sin(x))^2}}\,\mathrm{d}\,x$	$\left[\sqrt{2+(\sin(x))^2}\right]$
$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{2+(\sin(x))^2}}\,\mathrm{d}\,x$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Führen Sie eine Polynomdivision und eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{x^5-7x^3-18x+1}{x^2-9} = \boxed{x^3+2x+\tfrac{1}{6(x-3)}-\tfrac{1}{6(x+3)}}$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

$$\int\frac{x^5-7x^3-18x+1}{x^2-9}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\tfrac{1}{4}x^4+x^2+\tfrac{1}{6}\ln|x-3|-\tfrac{1}{6}\ln|x+3|\right]}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x(y^2-9) - 6y^2\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\left(\operatorname{grad} f(x,y)\right)^{\intercal} = \begin{pmatrix} \boxed{y^2-9} & \boxed{2xy-12y} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{2y} \\ \boxed{2y} & \boxed{2x-12} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen mit ihrem Typ an.

kritische Stelle	Typ
$(6,-3)$	hier liegt ein Sattelpunkt vor
$(6,3)$	hier liegt ein Sattelpunkt vor

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $(1,1)$:

$$T_2(f,(x,y),(1,1)) = \boxed{-14 - 8(x-1) - 10(y-1) + 2(x-1)(y-1) - 5(y-1)^2}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 5(x-2)^2 + 6\,.$$

Berechnen Sie für die Stelle $x_0 = 2$

$$|f(x) - f(x_0)| = \boxed{5(x-2)^2}$$

Bestimmen Sie für die Stelle $x_0 = 2$ und jede Zahl $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl $\delta_\varepsilon > 0$ so, dass gilt:

$$f\left(U_{\delta_\varepsilon}(2)\right) \subseteqq U_\varepsilon(f(2))$$

$$\delta_\varepsilon = \boxed{\sqrt{\tfrac{\varepsilon}{5}}}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \dfrac{7}{100}x^2 + \dfrac{3}{5} & \text{für} \quad x \leqq 1 \\[2ex] \dfrac{100x^2 - 137x + 37}{100x - 100} & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \boxed{\frac{67}{100}} \qquad \text{und} \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = \boxed{\frac{63}{100}}$$

Bestimmen Sie für die Stelle $x_0 = 1$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ so, dass für jede positive Zahl $\delta > 0$ gilt:

$$\exists\, x \in U_\delta(1)\colon\ |f(x) - f(1)| > \varepsilon\,.$$

$$\varepsilon = \boxed{\frac{3}{100}}$$

An welchen reellen Stellen x ist die Funktion f stetig?

$$x \in \boxed{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Sei f das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xy\cos(x^2y) + y^2 \\ x^2\cos(x^2y) - 4\alpha\, xy \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y) = \boxed{2x\cos(x^2y) - 2x^3y\sin(x^2y) + 2y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y) = \boxed{2x\cos(x^2y) - 2x^3y\sin(x^2y) - 4\alpha y}$$

und die Rotation

$$\operatorname{rot} f(x, y) = \boxed{-4\alpha y - 2y}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat f ein Potential?

$$\boxed{\alpha = -\tfrac{1}{2}}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/3	/6	/4	/5	/2	/4	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad x \mapsto x\mathrm{e}^{x^3+3x+3}$$

die erste Ableitung und das Taylorpolynom der Stufe 1 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$f'(x) = \boxed{(3x^3 + 3x + 1)\mathrm{e}^{x^3+3x+3}}$$

$$T_1(f, x, 0) = \boxed{\mathrm{e}^3 x}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(z+13)^k}{9^k}$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{8+(-1)^k}{8}\right)^k (z-3\mathrm{i})^k$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} 4^k \left(\frac{1}{3}z - \mathrm{i}\right)^k$
z_0	-13	$3\mathrm{i}$	$3\mathrm{i}$
ρ	9	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{4}$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int \Big((\sinh(x))^2 + 4 \Big) \,\mathrm{d}\,x$	$\left[\frac{1}{2}\sinh(x)\cosh(x) + \frac{7}{2}x\right]$
$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{5 + (\sin(x))^2}} \,\mathrm{d}\,x$	$\left[\sqrt{5 + (\sin(x))^2}\right]$
$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{5 + (\sin(x))^2}} \,\mathrm{d}\,x$	$\sqrt{6} - \sqrt{5}$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Führen Sie eine Polynomdivision und eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{x^5 - 2x^3 - 8x + 1}{x^2 - 4} = \boxed{x^3 + 2x + \tfrac{1}{4(x-2)} - \tfrac{1}{4(x+2)}}$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{x^5 - 2x^3 - 8x + 1}{x^2 - 4} \,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\tfrac{1}{4}x^4 + x^2 + \tfrac{1}{4}\ln|x-2| - \tfrac{1}{4}\ln|x+2|\right]}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto y(x^2-9) - 6x^2 \,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\big(\operatorname{grad} f(x,y)\big)^\intercal = \begin{pmatrix} \boxed{2xy - 12x} & \boxed{x^2 - 9} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{2y - 12} & \boxed{2x} \\ \boxed{2x} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen mit ihrem Typ an.

kritische Stelle	Typ
$(-3,6)$	hier liegt ein Sattelpunkt vor
$(3,6)$	hier liegt ein Sattelpunkt vor

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $(1,1)$:

$$T_2(f,(x,y),(1,1)) = \boxed{-14 - 10(x-1) - 8(y-1) + 2(x-1)(y-1) - 5(x-1)^2}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 3(x-3)^2 + 4\,.$$

Berechnen Sie für die Stelle $x_0 = 3$

$$|f(x) - f(x_0)| = \boxed{3(x-3)^2}$$

Bestimmen Sie für die Stelle $x_0 = 3$ und jede Zahl $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl $\delta_\varepsilon > 0$ so, dass gilt:

$$f\left(U_{\delta_\varepsilon}(3)\right) \subsetneqq U_\varepsilon(f(3))$$

$$\delta_\varepsilon = \boxed{\sqrt{\tfrac{\varepsilon}{3}}}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \dfrac{13}{100}x^2 + \dfrac{3}{5} & \text{für} \quad x \leqq 1 \\[2ex] \dfrac{100x^2 - 129x + 29}{100x - 100} & \text{für} \quad x > 1 \end{cases} .$$

Bestimmen Sie

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \boxed{\frac{73}{100}} \qquad \text{und} \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = \boxed{\frac{71}{100}}$$

Bestimmen Sie für die Stelle $x_0 = 1$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ so, dass für jede positive Zahl $\delta > 0$ gilt:

$$\exists\, x \in U_\delta(1)\colon\ |f(x) - f(1)| > \varepsilon\,.$$

$$\varepsilon = \boxed{\frac{1}{100}}$$

An welchen reellen Stellen x ist die Funktion f stetig?

$$x \in \boxed{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Sei f das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^2 \sin(xy^2) - 2xy \\ 2xy \sin(xy^2) + 3\alpha\, x^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y) = \boxed{2y \sin(xy^2) + 2xy^3 \cos(xy^2) - 2x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y) = \boxed{2y \sin(xy^2) + 2xy^3 \cos(xy^2) + 6\alpha x}$$

und die Rotation

$$\operatorname{rot} f(x,y) = \boxed{6\alpha x + 2x}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat f ein Potential?

$$\boxed{\alpha = -\tfrac{1}{3}}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/3	/6	/4	/5	/2	/4	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad x \mapsto x\mathrm{e}^{x^2+3x+2}$$

die erste Ableitung und das Taylorpolynom der Stufe 1 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$f'(x) = \boxed{(2x^2+3x+1)\mathrm{e}^{x^2+3x+2}}$$

$$T_1(f, x, 0) = \boxed{\mathrm{e}^2 x}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(z+12)^k}{6^k}$	$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5+(-1)^k}{7}\right)^k (z+3\mathrm{i})^k$	$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k \left(\frac{1}{7}z - \mathrm{i}\right)^k$
z_0	-12	$-3\mathrm{i}$	$7\mathrm{i}$
ρ	6	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{3}$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int \left((\cosh(x))^2 + 4\right) \mathrm{d}\,x$	$\left[\frac{1}{2}\sinh(x)\cosh(x) + \frac{9}{2}x\right]$
$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{2+(\cos(x))^2}} \mathrm{d}\,x$	$\left[-\sqrt{2+(\cos(x))^2}\right]$
$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{2+(\cos(x))^2}} \mathrm{d}\,x$	$\sqrt{2} - \sqrt{3}$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Führen Sie eine Polynomdivision und eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{x^5 - 6x^3 - 27x + 1}{x^2 - 9} = \boxed{x^3 + 3x + \tfrac{1}{6(x-3)} - \tfrac{1}{6(x+3)}}$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{x^5 - 6x^3 - 27x + 1}{x^2 - 9} \mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}\ln|x-3| - \tfrac{1}{6}\ln|x+3|\right]}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2(1+y^2) + y^3 - 3y\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\big(\operatorname{grad} f(x,y)\big)^\intercal = \begin{pmatrix} \boxed{2x(1+y^2)} & \boxed{2yx^2 + 3y^2 - 3} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{2(1+y^2)} & \boxed{4xy} \\ \boxed{4xy} & \boxed{2x^2 + 6y} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen mit ihrem Typ an.

kritische Stelle	Typ
$(0,-1)$	hier liegt ein Sattelpunkt vor
$(0,1)$	hier liegt eine lokale Minimalstelle vor

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $(1,1)$:

$$T_2(f,(x,y),(1,1)) = \boxed{4(x-1) + 2(y-1) + 4(x-1)(y-1) + 2(x-1)^2 + 4(y-1)^2}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2(x-2)^2 + 7\,.$$

Berechnen Sie für die Stelle $x_0 = 2$

$$|f(x) - f(x_0)| = \boxed{2(x-2)^2}$$

Bestimmen Sie für die Stelle $x_0 = 2$ und jede Zahl $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl $\delta_\varepsilon > 0$ so, dass gilt:

$$f\left(U_{\delta_\varepsilon}(2)\right) \subsetneqq U_\varepsilon(f(2))$$

$$\delta_\varepsilon = \boxed{\sqrt{\tfrac{\varepsilon}{2}}}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \dfrac{9}{100}x^2 + \dfrac{3}{5} & \text{für} \quad x \leqq 1 \\ \dfrac{100x^2 - 133x + 33}{100x - 100} & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \boxed{\frac{69}{100}} \qquad \text{und} \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = \boxed{\frac{67}{100}}$$

Bestimmen Sie für die Stelle $x_0 = 1$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ so, dass für jede positive Zahl $\delta > 0$ gilt:

$$\exists\, x \in U_\delta(1)\colon\ |f(x) - f(1)| > \varepsilon\,.$$

$$\varepsilon = \boxed{\frac{1}{100}}$$

An welchen reellen Stellen x ist die Funktion f stetig?

$$x \in \boxed{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Sei f das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4\alpha\, \mathrm{e}^y + 2xy\cos(x^2y) \\ x\,\mathrm{e}^y + x^2\cos(x^2y) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y) = \boxed{4\alpha \mathrm{e}^y + 2x\cos(x^2y) - 2x^3y\sin(x^2y)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y) = \boxed{\mathrm{e}^y + 2x\cos(x^2y) - 2x^3y\sin(x^2y)}$$

und die Rotation

$$\operatorname{rot} f(x,y) = \boxed{\mathrm{e}^y - 4\alpha \mathrm{e}^y}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat f ein Potential?

$$\boxed{\alpha = \tfrac{1}{4}}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/3	/6	/4	/5	/2	/4	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad x \mapsto x\mathrm{e}^{x^3+2x+3}$$

die erste Ableitung und das Taylorpolynom der Stufe 1 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$f'(x) = \boxed{(3x^3 + 2x + 1)\mathrm{e}^{x^3+2x+3}}$$

$$T_1(f, x, 0) = \boxed{\mathrm{e}^3 x}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(z-13)^k}{8^k}$	$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{6+(-1)^k}{6}\right)^k (z-2\mathrm{i})^k$	$\sum_{k=0}^{\infty} 4^k \left(\frac{1}{5}z - \mathrm{i}\right)^k$
z_0	13	$2\mathrm{i}$	$5\mathrm{i}$
ρ	8	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{4}$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int \Big((\sinh(x))^2 + 6 \Big) \,\mathrm{d}\, x$	$\left[\frac{1}{2}\sinh(x)\cosh(x) + \frac{11}{2}x\right]$
$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{5 + (\cos(x))^2}} \,\mathrm{d}\, x$	$\left[-\sqrt{5 + (\cos(x))^2}\right]$
$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{5 + (\cos(x))^2}} \,\mathrm{d}\, x$	$\sqrt{5} - \sqrt{6}$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Führen Sie eine Polynomdivision und eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{x^5 - x^3 - 12x + 1}{x^2 - 4} = \boxed{x^3 + 3x + \tfrac{1}{4(x-2)} - \tfrac{1}{4(x+2)}}$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{x^5 - x^3 - 12x + 1}{x^2 - 4} \,\mathrm{d}\, x = \boxed{\left[\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}\ln|x-2| - \tfrac{1}{4}\ln|x+2|\right]}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto y^2(1+x^2) + x^3 - 3x\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\big(\operatorname{grad} f(x,y)\big)^\intercal = \begin{pmatrix} \boxed{2xy^2 + 3x^2 - 3} & \boxed{2y(1+x^2)} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{2y^2 + 6x} & \boxed{4xy} \\ \boxed{4xy} & \boxed{2(1+x^2)} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen mit ihrem Typ an.

kritische Stelle	Typ
$(-1,0)$	hier liegt ein Sattelpunkt vor
$(1,0)$	hier liegt eine lokale Minimalstelle vor

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $(1,1)$:

$$T_2(f,(x,y),(1,1)) = \boxed{2(x-1) + 4(y-1) + 4(x-1)(y-1) + 4(x-1)^2 + 2(y-1)^2}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 3(x-3)^2 + 5\,.$$

Berechnen Sie für die Stelle $x_0 = 3$

$$|f(x) - f(x_0)| = \boxed{3(x-3)^2}$$

Bestimmen Sie für die Stelle $x_0 = 3$ und jede Zahl $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl $\delta_\varepsilon > 0$ so, dass gilt:

$$f\left(U_{\delta_\varepsilon}(3)\right) \subseteqq U_\varepsilon(f(3))$$

$$\delta_\varepsilon = \boxed{\sqrt{\tfrac{\varepsilon}{3}}}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \dfrac{11}{100}x^2 + \dfrac{3}{5} & \text{für} \quad x \leqq 1 \\[2ex] \dfrac{100x^2 - 131x + 31}{100x - 100} & \text{für} \quad x > 1 \end{cases} .$$

Bestimmen Sie

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \boxed{\frac{71}{100}} \qquad \text{und} \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = \boxed{\frac{69}{100}}$$

Bestimmen Sie für die Stelle $x_0 = 1$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ so, dass für jede positive Zahl $\delta > 0$ gilt:

$$\exists\, x \in U_\delta(1)\colon\ |f(x) - f(1)| > \varepsilon\,.$$

$$\varepsilon = \boxed{\frac{1}{100}}$$

An welchen reellen Stellen x ist die Funktion f stetig?

$$x \in \boxed{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Sei f das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -5\alpha y\, \mathrm{e}^x + y^2 \sin(xy^2) \\ -\mathrm{e}^x + 2xy \sin(xy^2) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y) = \boxed{-5\alpha \mathrm{e}^x + 2y\sin(xy^2) + 2xy^3\cos(xy^2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y) = \boxed{-\mathrm{e}^x + 2y\sin(xy^2) + 2xy^3\cos(xy^2)}$$

und die Rotation

$$\operatorname{rot} f(x,y) = \boxed{-\mathrm{e}^x + 5\alpha \mathrm{e}^x}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat f ein Potential?

$$\boxed{\alpha = \tfrac{1}{5}}$$
