Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/5	/7	/2	/3	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Ferner gelte:

$$a = 3b, \quad a = 2c, \quad d = b + 6c, \quad |a| = \sqrt{9}.$$

Berechnen Sie

$$\langle b \,|\, b \rangle = \boxed{1} \qquad \langle b \,|\, c \rangle = \boxed{\tfrac{3}{2}} \qquad \langle d \,|\, d \rangle = \boxed{100}\,.$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Gegeben seien die Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^3$

$$A = (1, 1, -1)\,, \quad B = \left(-\frac{1}{3}, 1, -2\right), \quad C = (-3, 4, -4)\,.$$

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene an, in der A, B und C liegen:

$$\boxed{\mathrm{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}}\,.$$

(b) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene aus **(a)** an:

$$\boxed{\left\langle \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{7}{5}}\,.$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)

Gegeben seien die Matrix A und der Vektor b durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -6 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Inverse von A: $\quad A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}\,.$

(b) Bestimmen Sie die Lösung x des linearen Gleichungssystems $Ax = b$: $\quad x = \boxed{\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}}\,.$

Aufgabe 5 (*7 Punkte*)

Gegeben sei der Vektorraum $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{2} \alpha_j X^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ und $\mathcal{C} = \{1, X, \frac{1}{2}(3X^2 - 1)\}$. Weiterhin soll die lineare Abbildung $\varphi\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\varphi(-1) = -4X, \quad \varphi(X - 1) = 2X - 4, \quad \varphi\left(\frac{X^2}{2} - 2X\right) = X^2 - X + 1.$$

(a) Bestimmen Sie:

$\varphi(1) = \boxed{4X}$ $\varphi(X) = \boxed{6X - 4}$

$\varphi\left(X^2\right) = \boxed{2X^2 + 22X - 14}$ $\varphi\left(\frac{1}{2}(3X^2 - 1)\right) = \boxed{3X^2 + 31X - 21}$

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$:

$${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -4 & -14 \\ 4 & 6 & 22 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -4 & -20 \\ 4 & 6 & 31 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

(c) Bestimmen Sie das Bild von $p(X) = 3X^2 - 2X - 1$ unter φ:

$$\varphi(3X^2 - 2X - 1) = \boxed{6X^2 + 50X - 34}.$$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*)

(a) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 2^{-n} + \frac{(-1)^n}{2}$.

Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine obere und untere Schranke für die Folge. Falls eine der beiden Schranken nicht existiert, tragen Sie „existiert nicht“ in das entsprechende Kästchen ein.

Untere Schranke: $\boxed{-\frac{1}{2}}$ Obere Schranke: $\boxed{\frac{3}{4}}$

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, welche die obere Schranke π und die untere Schranke $\pi - 1$ besitzt und streng monoton steigend ist.

$$b_n = \boxed{\pi - \frac{1}{n}}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Gegeben sei die von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige reelle Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_{1,\alpha}$ und $\lambda_{2,\alpha}$ der Matrix A_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ an.

$\lambda_{1,\alpha} = \boxed{2+\alpha}$ $\lambda_{2,\alpha} = \boxed{2-\alpha}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die quadratische Form $q_{A_\alpha}(x) = x^\mathsf{T} A_\alpha x$ positiv definit?

$\alpha \in \boxed{(-2, 2)}$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Gegeben sei die komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 6\mathrm{i} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$\det(A) = \boxed{222}$ $\mathrm{Sp}(A) = \boxed{19\mathrm{i}}$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$ der Matrix A.

$\lambda_1 = \boxed{\mathrm{i}}$ $\lambda_2 = \boxed{6\mathrm{i}}$

$\lambda_3 = \boxed{1+6\mathrm{i}}$ $\lambda_4 = \boxed{-1+6\mathrm{i}}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/5	/7	/2	/3	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Ferner gelte:

$$a = 3b, \quad a = 2c, \quad d = 9b + 4c, \quad |a| = \sqrt{2}.$$

Berechnen Sie

$$\langle b \,|\, b \rangle = \boxed{\tfrac{2}{9}} \qquad \langle b \,|\, c \rangle = \boxed{\tfrac{1}{3}} \qquad \langle d \,|\, d \rangle = \boxed{50}\ .$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Gegeben seien die Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^3$

$$A = (-1, 1, 1)\,, \quad B = (0, -1, 1)\,, \quad C = (0, 1, 2)\,.$$

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene an, in der A, B und C liegen:

$$\boxed{\mathrm{E} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}}\,.$$

(b) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene aus **(a)** an:

$$\boxed{\left\langle \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 1}\,.$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)

Gegeben seien die Matrix A und der Vektor b durch

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 20 & -24 \\ 4 & -15 & 18 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Inverse von A: $\quad A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}}\,.$

(b) Bestimmen Sie die Lösung x des linearen Gleichungssystems $Ax = b$: $\quad x = \boxed{\begin{pmatrix} 13 \\ 19 \\ 13 \end{pmatrix}}\,.$

Aufgabe 5 (*7 Punkte*)

Gegeben sei der Vektorraum $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{2} \alpha_j X^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ und $\mathcal{C} = \{1, X, \frac{1}{2}(3X^2 - 1)\}$. Weiterhin soll die lineare Abbildung $\varphi\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\varphi(-1) = 4X, \quad \varphi(X-1) = 2X - 3, \quad \varphi\left(\frac{X^2}{2} - 2X\right) = 2X^2 - X + 1.$$

(a) Bestimmen Sie:

$\varphi(1) = \boxed{-4X}$ $\qquad \varphi(X) = \boxed{-2X - 3}$

$\varphi(X^2) = \boxed{4X^2 - 10X - 10}$ $\qquad \varphi\left(\frac{1}{2}(3X^2 - 1)\right) = \boxed{6X^2 - 13X - 15}$

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$:

$${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -3 & -10 \\ -4 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -3 & -13 \\ -4 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}.$$

(c) Bestimmen Sie das Bild von $p(X) = 3X^2 - 2X - 1$ unter φ:

$$\varphi(3X^2 - 2X - 1) = \boxed{12X^2 - 22X - 24}.$$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*)

(a) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 3^{-n} + \frac{(-1)^n}{3}$.

Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine obere und untere Schranke für die Folge. Falls eine der beiden Schranken nicht existiert, tragen Sie „existiert nicht“ in das entsprechende Kästchen ein.

Untere Schranke: $\boxed{-\frac{1}{3}}$ $\qquad$ Obere Schranke: $\boxed{\frac{4}{9}}$

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche die obere Schranke $\pi + 1$ und die untere Schranke π besitzt und streng monoton fallend ist.

$$b_n = \boxed{\pi + \frac{1}{n}}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Gegeben sei die von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige reelle Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ \alpha & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_{1,\alpha}$ und $\lambda_{2,\alpha}$ der Matrix A_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ an.

$\lambda_{1,\alpha} = \boxed{3+\alpha}$ $\lambda_{2,\alpha} = \boxed{3-\alpha}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die quadratische Form $q_{A_\alpha}(x) = x^\mathsf{T} A_\alpha x$ positiv definit?

$\alpha \in \boxed{(-3, 3)}$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Gegeben sei die komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3\mathrm{i} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$\det(A) = \boxed{240}$ $\mathrm{Sp}(A) = \boxed{17\mathrm{i}}$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$ der Matrix A.

$\lambda_1 = \boxed{8\mathrm{i}}$ $\lambda_2 = \boxed{3\mathrm{i}}$

$\lambda_3 = \boxed{1+3\mathrm{i}}$ $\lambda_4 = \boxed{-1+3\mathrm{i}}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/5	/7	/2	/3	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Ferner gelte:

$$a = 3b, \quad a = 2c, \quad d = 3b + 2c, \quad |a| = \sqrt{5}.$$

Berechnen Sie

$$\langle b \,|\, b \rangle = \boxed{\tfrac{5}{9}} \qquad \langle b \,|\, c \rangle = \boxed{\tfrac{5}{6}} \qquad \langle d \,|\, d \rangle = \boxed{20}\,.$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Gegeben seien die Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^3$

$$A = (-1,-1,1)\,, \quad B = (-1,3,-2)\,, \quad C = (-2,-5,4)\,.$$

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene an, in der A, B und C liegen:

$$\boxed{\mathrm{E} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}}\,.$$

(b) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene aus **(a)** an:

$$\boxed{\left\langle \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{5}}\,.$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)

Gegeben seien die Matrix A und der Vektor b durch

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Inverse von A: $\quad A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}\,.$

(b) Bestimmen Sie die Lösung x des linearen Gleichungssystems $Ax = b$: $\quad x = \boxed{\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}}\,.$

Aufgabe 5 (*7 Punkte*)

Gegeben sei der Vektorraum $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{2} \alpha_j X^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ und $\mathcal{C} = \{1, X, \frac{1}{2}(3X^2 - 1)\}$. Weiterhin soll die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\varphi(-1) = -6X, \quad \varphi(X-1) = 2X - 2, \quad \varphi\left(\frac{X^2}{2} - 2X\right) = 4X^2 - X + 1.$$

(a) Bestimmen Sie:

$\varphi(1) = \boxed{6X}$ $\qquad$ $\varphi(X) = \boxed{8X - 2}$

$\varphi\left(X^2\right) = \boxed{8X^2 + 30X - 6}$ $\qquad$ $\varphi\left(\frac{1}{2}(3X^2 - 1)\right) = \boxed{12X^2 + 42X - 9}$

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$:

$${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 6 & 8 & 30 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 6 & 8 & 42 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}.$$

(c) Bestimmen Sie das Bild von $p(X) = 3X^2 - 2X - 1$ unter φ:

$$\varphi(3X^2 - 2X - 1) = \boxed{24X^2 + 68X - 14}.$$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*)

(a) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 4^{-n} + \frac{(-1)^n}{4}$.

Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine obere und untere Schranke für die Folge. Falls eine der beiden Schranken nicht existiert, tragen Sie „existiert nicht“ in das entsprechende Kästchen ein.

Untere Schranke: $\boxed{-\frac{1}{4}}$ $\qquad$ Obere Schranke: $\boxed{\frac{5}{16}}$

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche die obere Schranke $-\pi$ und die untere Schranke $-(\pi + 1)$ besitzt und streng monoton steigend ist.

$$b_n = \boxed{-\pi - \frac{1}{n}}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Gegeben sei die von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige reelle Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ \alpha & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_{1,\alpha}$ und $\lambda_{2,\alpha}$ der Matrix A_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ an.

$\lambda_{1,\alpha} = \boxed{4+\alpha}$ $\lambda_{2,\alpha} = \boxed{4-\alpha}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die quadratische Form $q_{A_\alpha}(x) = x^\mathsf{T} A_\alpha x$ positiv definit?

$\alpha \in \boxed{(-4, 4)}$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Gegeben sei die komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4\mathrm{i} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$\det(A) = \boxed{204}$ $\mathrm{Sp}(A) = \boxed{15\mathrm{i}}$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$ der Matrix A.

$\lambda_1 = \boxed{3\mathrm{i}}$ $\lambda_2 = \boxed{4\mathrm{i}}$

$\lambda_3 = \boxed{1+4\mathrm{i}}$ $\lambda_4 = \boxed{-1+4\mathrm{i}}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/5	/7	/2	/3	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Gruppennr.:** ☐

Aufgabe 2 (*3 Punkte*)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Ferner gelte:

$$a = 3b, \quad a = 2c, \quad d = 6b + c, \quad |a| = \sqrt{4}.$$

Berechnen Sie

$$\langle b \,|\, b \rangle = \boxed{\tfrac{4}{9}} \qquad \langle b \,|\, c \rangle = \boxed{\tfrac{2}{3}} \qquad \langle d \,|\, d \rangle = \boxed{25}\,.$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Gegeben seien die Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^3$

$$A = (1, -1, 1)\,, \quad B = (0, 2, 1)\,, \quad C = (2, -1, 3)\,.$$

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene an, in der A, B und C liegen:

$$\boxed{\mathrm{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}} \,.$$

(b) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene aus **(a)** an:

$$\boxed{\left\langle \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{7}} \,.$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)

Gegeben seien die Matrix A und der Vektor b durch

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Inverse von A: $\quad A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}\,.$

(b) Bestimmen Sie die Lösung x des linearen Gleichungssystems $Ax = b$: $\quad x = \boxed{\begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ -8 \end{pmatrix}}\,.$

Aufgabe 5 (*7 Punkte*)

Gegeben sei der Vektorraum $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{2} \alpha_j X^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ und $\mathcal{C} = \{1, X, \frac{1}{2}(3X^2 - 1)\}$. Weiterhin soll die lineare Abbildung $\varphi\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\varphi(-1) = 6X, \quad \varphi(X-1) = 2X - 1, \quad \varphi\left(\frac{X^2}{2} - 2X\right) = 6X^2 - X + 1.$$

(a) Bestimmen Sie:

$\varphi(1) = \boxed{-6X}$ $\qquad \varphi(X) = \boxed{-4X - 1}$

$\varphi\left(X^2\right) = \boxed{12X^2 - 18X - 2}$ $\qquad \varphi\left(\frac{1}{2}(3X^2 - 1)\right) = \boxed{18X^2 - 24X - 3}$

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$:

$${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -6 & -4 & -18 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -6 & -4 & -24 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}}.$$

(c) Bestimmen Sie das Bild von $p(X) = 3X^2 - 2X - 1$ unter φ:

$$\varphi(3X^2 - 2X - 1) = \boxed{36X^2 - 40X - 4}.$$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*)

(a) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 5^{-n} + \frac{(-1)^n}{5}$.

Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine obere und untere Schranke für die Folge. Falls eine der beiden Schranken nicht existiert, tragen Sie „existiert nicht“ in das entsprechende Kästchen ein.

Untere Schranke: $\boxed{-\frac{1}{5}}$ $\qquad$ Obere Schranke: $\boxed{\frac{6}{25}}$

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche die obere Schranke $-\pi$ und die untere Schranke $-(\pi+1)$ besitzt und streng monoton fallend ist.

$$b_n = \boxed{-(\pi + 1) + \frac{1}{n}}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Gegeben sei die von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige reelle Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 5 & \alpha \\ \alpha & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_{1,\alpha}$ und $\lambda_{2,\alpha}$ der Matrix A_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ an.

$\lambda_{1,\alpha} = \boxed{5+\alpha}$ $\lambda_{2,\alpha} = \boxed{5-\alpha}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die quadratische Form $q_{A_\alpha}(x) = x^\mathsf{T} A_\alpha x$ positiv definit?

$\alpha \in \boxed{(-5, 5)}$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Gegeben sei die komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5\mathrm{i} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$\det(A) = \boxed{520}$ $\mathrm{Sp}(A) = \boxed{19\mathrm{i}}$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$ der Matrix A.

$\lambda_1 = \boxed{4\mathrm{i}}$ $\lambda_2 = \boxed{5\mathrm{i}}$

$\lambda_3 = \boxed{1+5\mathrm{i}}$ $\lambda_4 = \boxed{-1+5\mathrm{i}}$
