Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/6	/2	/3	/6	/4	/3	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben seien im Raum $\mathbb{R}^3$ die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, in welcher die Punkte A, B und C liegen.

$$\boxed{\left\langle \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{3}{\sqrt{13}}}$$

(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

$$\boxed{\frac{\sqrt{13}}{2}}$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A, A^2 und $2A$.

$$\det(A) = \boxed{-4}\ , \quad \det(A^2) = \boxed{16}\ , \quad \det(2A) = \boxed{-32}$$

(b) Bestimmen Sie A^{-1}.

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (*2 Punkte*) Gegeben sei die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A: $\quad \operatorname{Rg}(A) = \boxed{3}$

(b) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von f: $\quad \dim \operatorname{Kern}(f) = \boxed{1}$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z - 6\mathrm{i})^2 = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right).$$

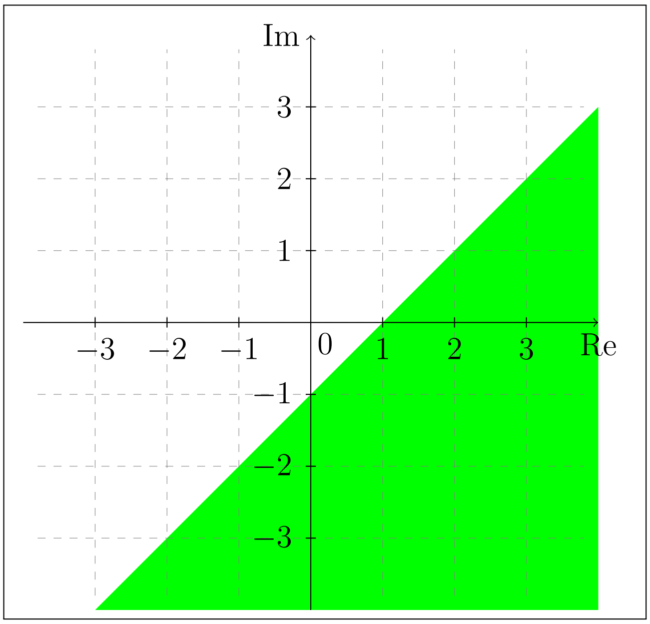
Geben Sie die Lösung in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\boxed{z_1 = -\sqrt{3} + 7\mathrm{i}, \quad z_2 = \sqrt{3} + 5\mathrm{i}}$$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*)

(a) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Ebene.

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z+2| \geqq |z-1+3\mathrm{i}| \right\}$$

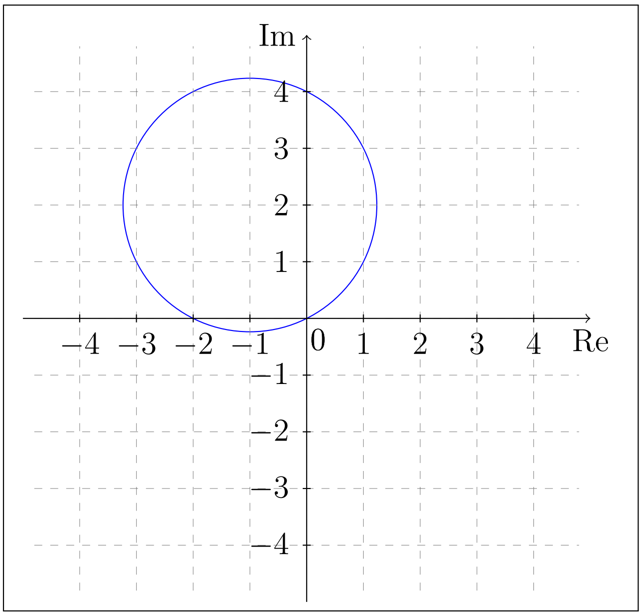


(b) Sei $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Berechnen Sie $(z - 2\mathrm{i} + 1)\bar{z} + z + 2\mathrm{i}\, z$ in Abhängigkeit von a und b.

$$(z - 2\mathrm{i} + 1)\bar{z} + z + 2\mathrm{i}\, z = \boxed{a^2 + b^2 + 2a - 4b}$$

(c) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Ebene.

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; (z - 2\mathrm{i} + 1)\bar{z} + z + 2\mathrm{i}\, z = 0 \right\}$$



Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie das Bild der folgenden Abbildung: $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{6\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{1}{x-6} + 3$

$$\boxed{\mathbb{R} \smallsetminus \{3\}}$$

(b) Bestimmen Sie für die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto (z + 3\mathrm{i})^2$
zwei verschiedene Werte $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_1) = f(z_2)$. Geben Sie z_1 und z_2 in der Form $a + b\,\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$z_1 = \boxed{1 - 3\mathrm{i}} \qquad z_2 = \boxed{-1 - 3\mathrm{i}}$$

(c) Geben Sie eine Abbildung

$$f\colon\ [-2, 2] \to [1, 6]$$

an, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

$$\boxed{f\colon\ [-2, 2] \to [1, 6] : x \mapsto \begin{cases} \frac{5}{2}x + 6 & \text{falls} \quad x \leqq 0 \\ 3 & \text{falls} \quad x > 0 \end{cases}}$$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Basis $B\colon 1,\ X - 1,\ X^2 - X$ des reellen Vektorraums $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ von Grad $\leqq 2$. Sei weiter das Polynom $p = -5X^2 + 3X - 7 \in \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ gegeben. Geben Sie den Koordinatenvektor ${}_B p$ des Polynoms p zur Basis B an.

$${}_B p = \boxed{\begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Es sei E die Standardbasis.

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung ${}_E\varphi_E$ an: ${}_E\varphi_E = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}$

(b) Bestimmen Sie $\varphi \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/6	/2	/3	/6	/4	/3	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben seien im Raum $\mathbb{R}^3$ die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, in welcher die Punkte A, B und C liegen.

$$\boxed{\left\langle \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{11}}}$$

(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

$$\boxed{\frac{\sqrt{11}}{2}}$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A, A^2 und $3A$.

$$\det(A) = \boxed{2}\ , \quad \det(A^2) = \boxed{4}\ , \quad \det(3A) = \boxed{54}$$

(b) Bestimmen Sie A^{-1}.

$$A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (*2 Punkte*) Gegeben sei die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \colon v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ -2 & 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A: $\quad \mathrm{Rg}(A) = \boxed{2}$

(b) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von f: $\quad \dim \mathrm{Kern}\,(f) = \boxed{2}$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z - 7\mathrm{i})^2 = 4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right).$$

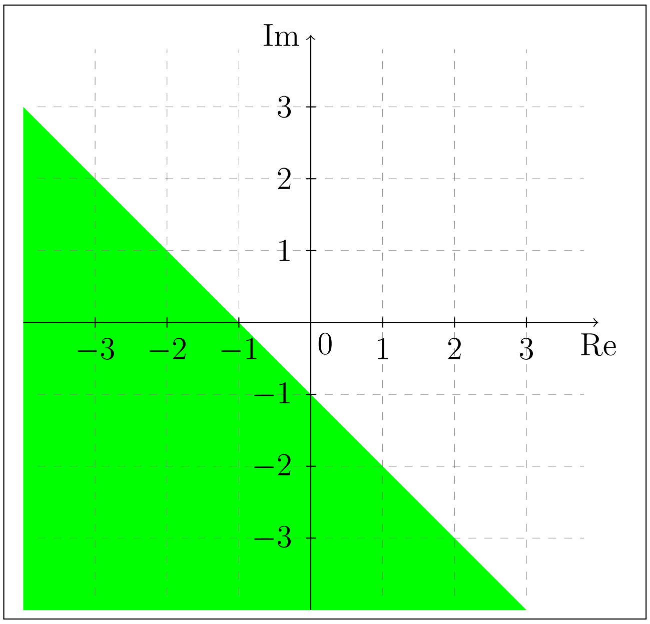
Geben Sie die Lösung in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\boxed{z_1 = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i} + 7\mathrm{i}, \quad z_2 = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i} + 7\mathrm{i}}$$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*)

(a) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Ebene.

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-2| \geqq |z+1+3\mathrm{i}| \right\}$$

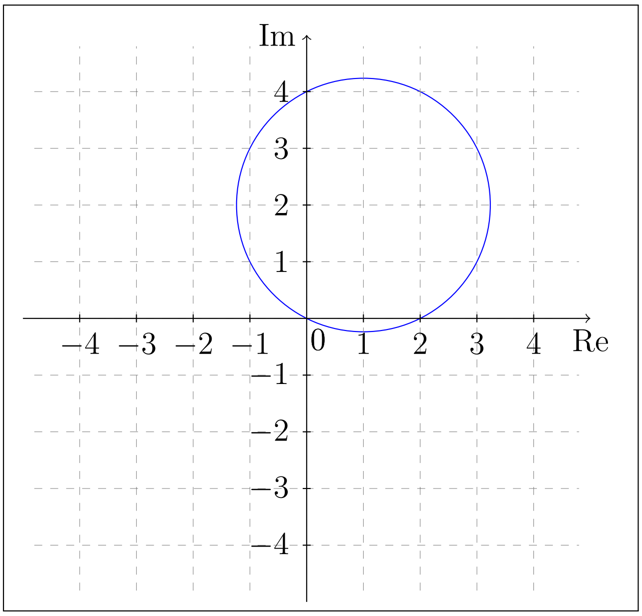


(b) Sei $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Berechnen Sie $(z - 2\mathrm{i} - 1)\bar{z} - z + 2\mathrm{i}\,z$ in Abhängigkeit von a und b.

$$(z - 2\mathrm{i} - 1)\bar{z} - z + 2\mathrm{i}\,z = \boxed{a^2 + b^2 - 2a - 4b}$$

(c) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Ebene.

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, (z - 2\mathrm{i} - 1)\bar{z} - z + 2\mathrm{i}\,z = 0 \right\}$$



Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie das Bild der folgenden Abbildung: $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{8\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{1}{x-8} + 2$

$$\boxed{\mathbb{R} \smallsetminus \{2\}}$$

(b) Bestimmen Sie für die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto (z - 2\mathrm{i})^2$
zwei verschiedene Werte $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_1) = f(z_2)$. Geben Sie z_1 und z_2 in der Form $a + b\,\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$z_1 = \boxed{1 + 2\mathrm{i}} \qquad z_2 = \boxed{-1 + 2\mathrm{i}}$$

(c) Geben Sie eine Abbildung

$$f\colon\ [-2, 2] \to [2, 5]$$

an, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

$$\boxed{f\colon\ [-2,2] \to [2,5] : x \mapsto \begin{cases} \frac{3}{2}x + 5 & \text{falls} \quad x \leqq 0 \\ 4 & \text{falls} \quad x > 0 \end{cases}}$$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Basis $B\colon 1,\ X-1,\ X^2-X$ des reellen Vektorraums $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ von Grad $\leqq 2$. Sei weiter das Polynom $p = -6X^2 + 7X - 2 \in \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ gegeben. Geben Sie den Koordinatenvektor ${}_Bp$ des Polynoms p zur Basis B an.

$${}_Bp = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Es sei E die Standardbasis.

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung ${}_E\varphi_E$ an: ${}_E\varphi_E = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}$

(b) Bestimmen Sie $\varphi\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/6	/2	/3	/6	/4	/3	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben seien im Raum $\mathbb{R}^3$ die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, in welcher die Punkte A, B und C liegen.

$$\boxed{\left\langle \frac{1}{\sqrt{19}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{6}{\sqrt{19}}}$$

(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

$$\boxed{\frac{\sqrt{19}}{2}}$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A, A^2 und $3A$.

$$\det(A) = \boxed{-2}\ , \quad \det(A^2) = \boxed{4}\ , \quad \det(3A) = \boxed{-54}$$

(b) Bestimmen Sie A^{-1}.

$$A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (*2 Punkte*) Gegeben sei die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A: $\quad \mathrm{Rg}(A) = \boxed{2}$

(b) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von f: $\quad \dim \mathrm{Kern}\,(f) = \boxed{2}$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z - 5\mathrm{i})^2 = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right).$$

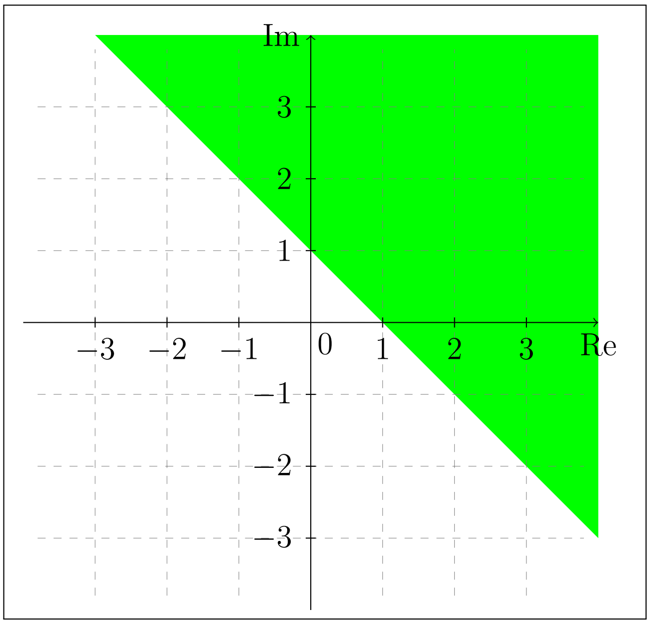
Geben Sie die Lösung in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\boxed{z_1 = -\sqrt{3} + 6\mathrm{i}, \quad z_2 = \sqrt{3} + 4\mathrm{i}}$$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*)

(a) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Ebene.

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z+2| \geqq |z-1-3\mathrm{i}| \right\}$$

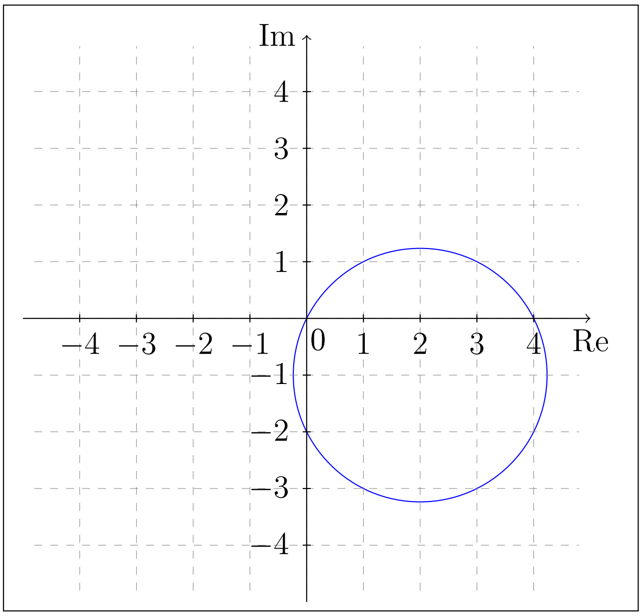


(b) Sei $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Berechnen Sie $(z - 2 + \mathrm{i})\bar{z} - 2z - \mathrm{i}\,z$ in Abhängigkeit von a und b.

$$(z-2+\mathrm{i})\bar{z} - 2z - \mathrm{i}\,z = \boxed{a^2 + b^2 - 4a + 2b}$$

(c) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Ebene.

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; (z-2+\mathrm{i})\bar{z} - 2z - \mathrm{i}\,z = 0 \right\}$$



Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie das Bild der folgenden Abbildung: $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{7\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{1}{x-7} + 5$

$$\boxed{\mathbb{R} \smallsetminus \{5\}}$$

(b) Bestimmen Sie für die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto (z - 3\mathrm{i})^2$
zwei verschiedene Werte $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_1) = f(z_2)$. Geben Sie z_1 und z_2 in der Form $a + b\,\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$z_1 = \boxed{1 + 3\mathrm{i}} \qquad z_2 = \boxed{-1 + 3\mathrm{i}}$$

(c) Geben Sie eine Abbildung

$$f\colon\ [-2, 2] \to [1, 8]$$

an, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

$$\boxed{f\colon\ [-2,2] \to [1,8] : x \mapsto \begin{cases} \frac{7}{2}x + 8 & \text{falls} \quad x \leqq 0 \\ 2 & \text{falls} \quad x > 0 \end{cases}}$$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Basis $B\colon 1,\ X-1,\ X^2-X$ des reellen Vektorraums $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ von Grad $\leqq 2$. Sei weiter das Polynom $p = -7X^2 + 3X - 6 \in \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ gegeben. Geben Sie den Koordinatenvektor ${}_Bp$ des Polynoms p zur Basis B an.

$${}_Bp = \boxed{\begin{pmatrix} -10 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Es sei E die Standardbasis.

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung ${}_E\varphi_E$ an: ${}_E\varphi_E = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}$

(b) Bestimmen Sie $\varphi\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/6	/2	/3	/6	/4	/3	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben seien im Raum $\mathbb{R}^3$ die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, in welcher die Punkte A, B und C liegen.

$$\boxed{\left\langle \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{17}}}$$

(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

$$\boxed{\frac{\sqrt{17}}{2}}$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A, A^2 und $3A$.

$$\det(A) = \boxed{-2}\ , \quad \det(A^2) = \boxed{4}\ , \quad \det(3A) = \boxed{-54}$$

(b) Bestimmen Sie A^{-1}.

$$A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (*2 Punkte*) Gegeben sei die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 6 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A: $\quad \mathrm{Rg}(A) = \boxed{3}$

(b) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von f: $\quad \dim \mathrm{Kern}\,(f) = \boxed{1}$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z - 8\mathrm{i})^2 = 4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) .$$

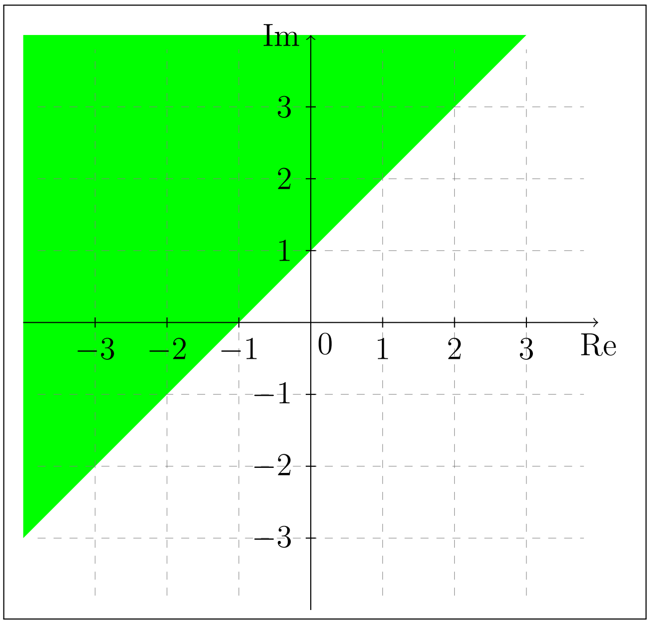
Geben Sie die Lösung in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\boxed{z_1 = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i} + 8\mathrm{i}, \quad z_2 = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i} + 8\mathrm{i}}$$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*)

(a) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Ebene.

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z-2| \geqq |z+1-3\mathrm{i}| \right\}$$

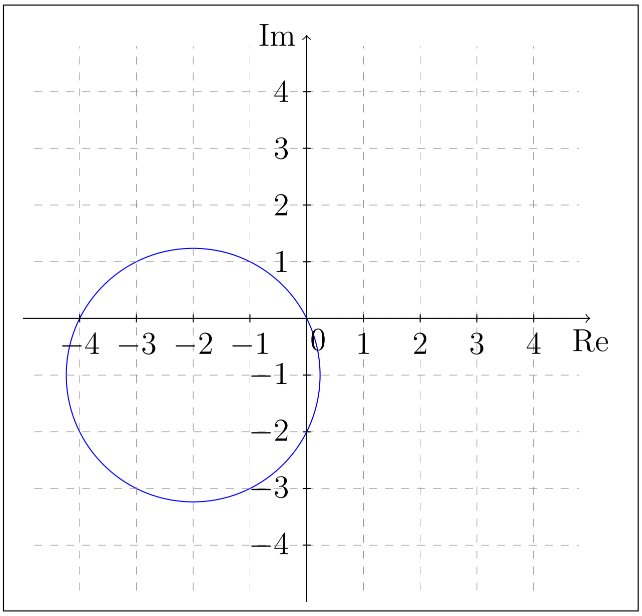


(b) Sei $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Berechnen Sie $(z+2+\mathrm{i})\bar{z} + 2z - \mathrm{i}\,z$ in Abhängigkeit von a und b.

$$(z+2+\mathrm{i})\bar{z} + 2z - \mathrm{i}\,z = \boxed{a^2 + b^2 + 4a + 2b}$$

(c) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Ebene.

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; (z+2+\mathrm{i})\bar{z} + 2z - \mathrm{i}\,z = 0 \right\}$$



Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie das Bild der folgenden Abbildung: $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{9\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{1}{x-9} + 4$

$$\boxed{\mathbb{R} \smallsetminus \{4\}}$$

(b) Bestimmen Sie für die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto (z + 2\mathrm{i})^2$ zwei verschiedene Werte $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_1) = f(z_2)$. Geben Sie z_1 und z_2 in der Form $a + b\,\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$z_1 = \boxed{1 - 2\mathrm{i}} \qquad z_2 = \boxed{-1 - 2\mathrm{i}}$$

(c) Geben Sie eine Abbildung

$$f\colon\ [-2, 2] \to [2, 7]$$

an, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

$$\boxed{f\colon\ [-2, 2] \to [2, 7] : x \mapsto \begin{cases} \frac{5}{2}x + 7 & \text{falls} \quad x \leqq 0 \\ 3 & \text{falls} \quad x > 0 \end{cases}}$$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Basis $B\colon 1,\ X-1,\ X^2-X$ des reellen Vektorraums $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ von Grad $\leqq 2$. Sei weiter das Polynom $p = -8X^2 + 7X - 4 \in \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ gegeben. Geben Sie den Koordinatenvektor ${}_{B}p$ des Polynoms p zur Basis B an.

$${}_{B}p = \boxed{\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Es sei E die Standardbasis.

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung ${}_{E}\varphi_{E}$ an: $\quad {}_{E}\varphi_{E} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}$

(b) Bestimmen Sie $\varphi\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}}$