Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/3	/5	/2	/10	/7	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & b & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass A eigentlich orthogonal ist:

$(a, b, c) =$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*)

Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2)$. Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (3,5)^\intercal,\ _{\mathbb{E}}P_1 = (1,4)^\intercal,\ _{\mathbb{E}}P_2 = (0,2)^\intercal.$$

Gesucht ist nun ein zweites Koordinatensystem $\mathbb{F}$ mit

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0,0)^\intercal,\ _{\mathbb{F}}P_1 = (1,0)^\intercal,\ _{\mathbb{F}}P_2 = (0,1)^\intercal.$$

Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ und die Koordinatentransformation $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an:

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{} ; \boxed{} , \boxed{} \right), \qquad _{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \left(\boxed{} \right) \cdot v + \left(\boxed{} \right).$$

Geben Sie außerdem die Koordinatentransformation $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an:

$$_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \left(\boxed{} \right) \cdot v + \left(\boxed{} \right).$$

Aufgabe 4 (*2 Punkte*)

Gegeben sei das Ellipsoid

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 | -2x_1^2 - 6x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0\}$$

und die vom Parameter $d \in \mathbb{R}$ abhängige Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 | \, x_2 = d\}$. Geben Sie, falls möglich, ein $d \in \mathbb{R}$ so an, dass der Schnitt $Q \cap E_d$ die jeweils angegebene Gestalt hat. Falls dies nicht möglich ist, so tragen Sie „existiert nicht“ in das Kästchen ein.

(a) $Q \cap E_d$ ist genau ein Punkt. $\boxed{}$

(b) $Q \cap E_d$ ist eine Gerade. $\boxed{}$

Aufgabe 5 (*10 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 |\, 2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 2x_2 + 1 = 0\}.$$

Geben Sie A, a und c für die Matrixbeschreibung $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ von Q an:

$$A = \boxed{}, \quad a = \boxed{}, \quad c = \boxed{}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A:

$$\lambda_1 = \boxed{}, \quad \lambda_2 = \boxed{}, \quad \lambda_3 = \boxed{}.$$

Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume:

$$V(\lambda_1) = \boxed{}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{}.$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform hat. Geben Sie außerdem die Gestalt von Q an:

Euklidische Normalform:

Koordinatensystem:

Gestalt:

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A_a = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom von A_a an:

$$\chi_{A_a}(\lambda) = \boxed{}$$

(b) Geben Sie alle Eigenwerte von A_{-3} an:

$$\lambda_1 = \boxed{}, \qquad \lambda_2 = \boxed{}.$$

(c) Finden Sie a so, dass $v = (4, -1)^\intercal$ ein Eigenvektor von A_a ist:

$$a = \boxed{}$$

(d) Für welchen Wert des Parameters a besitzt A_a nur einen Eigenwert λ? Geben Sie a, λ, die algebraische Vielfachheit e_λ und die geometrische Vielfachheit d_λ zu λ an:

$$a = \boxed{}, \quad \lambda = \boxed{}, \quad e_\lambda = \boxed{}, \quad d_\lambda = \boxed{}.$$

(e) Geben Sie für A_5 einen Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^2$ zum Eigenwert $\lambda = 1 + 2\mathrm{i}$ an:

$$v = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind gegeben durch

$$a_n := 6 + 2(-1)^n \quad \text{und} \quad b_n := \frac{4n^2 + 8n + 3}{(n+1)^2}$$

(a) Bestimmen Sie eine reelle obere Schranke für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie eine reelle untere Schranke für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{}$

(c) Geben Sie eine reelle Zahl an, die sowohl eine untere Schranke für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch eine obere Schranke für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist: $\boxed{}$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/3	/5	/2	/10	/7	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass A uneigentlich orthogonal ist:

$(a, b, c) =$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*)

Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2)$. Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (3,1)^{\mathsf{T}},\ _{\mathbb{E}}P_1 = (1,2)^{\mathsf{T}},\ _{\mathbb{E}}P_2 = (0,1)^{\mathsf{T}}.$$

Gesucht ist nun ein zweites Koordinatensystem $\mathbb{F}$ mit

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0,0)^{\mathsf{T}},\ _{\mathbb{F}}P_1 = (1,0)^{\mathsf{T}},\ _{\mathbb{F}}P_2 = (0,1)^{\mathsf{T}}.$$

Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ und die Koordinatentransformation $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an:

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{} ; \boxed{} , \boxed{} \right), \qquad _{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \left(\boxed{} \right) \cdot v + \left(\boxed{} \right).$$

Geben Sie außerdem die Koordinatentransformation $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an:

$$_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \left(\boxed{} \right) \cdot v + \left(\boxed{} \right).$$

Aufgabe 4 (*2 Punkte*)

Gegeben sei das Ellipsoid

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 |\ -3x_1^2 - 5x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0\}$$

und die vom Parameter $d \in \mathbb{R}$ abhängige Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 = d\}$. Geben Sie, falls möglich, ein $d \in \mathbb{R}$ so an, dass der Schnitt $Q \cap E_d$ die jeweils angegebene Gestalt hat. Falls dies nicht möglich ist, so tragen Sie „existiert nicht“ in das Kästchen ein.

(a) $Q \cap E_d$ ist eine Gerade. $\boxed{}$

(b) $Q \cap E_d$ ist genau ein Punkt. $\boxed{}$

Aufgabe 5 (*10 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2 - 1 = 0\}.$$

Geben Sie A, a und c für die Matrixbeschreibung $x^\mathsf{T}Ax + 2a^\mathsf{T}x + c = 0$ von Q an:

$A = \boxed{}$, $a = \boxed{}$, $c = \boxed{}$.

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A:

$\lambda_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$, $\lambda_3 = \boxed{}$.

Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume:

$V(\lambda_1) = \boxed{}$, $V(\lambda_2) = \boxed{}$, $V(\lambda_3) = \boxed{}$.

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform hat. Geben Sie außerdem die Gestalt von Q an:

Euklidische Normalform: $\boxed{}$

Koordinatensystem: $\boxed{}$

Gestalt: $\boxed{}$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A_a = \begin{pmatrix} -2 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom von A_a an:

$$\chi_{A_a}(\lambda) = \boxed{}$$

(b) Geben Sie alle Eigenwerte von A_3 an:

$$\lambda_1 = \boxed{}, \qquad \lambda_2 = \boxed{}.$$

(c) Finden Sie a so, dass $v = (5, -1)^\intercal$ ein Eigenvektor von A_a ist:

$$a = \boxed{}$$

(d) Für welchen Wert des Parameters a besitzt A_a nur einen Eigenwert λ? Geben Sie a, λ, die geometrische Vielfachheit d_λ und die algebraische Vielfachheit e_λ zu λ an:

$$a = \boxed{}, \quad \lambda = \boxed{}, \quad d_\lambda = \boxed{}, \quad e_\lambda = \boxed{}.$$

(e) Geben Sie für A_{-5} einen Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^2$ zum Eigenwert $\lambda = -1 + 2\mathrm{i}$ an:

$$v = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind gegeben durch

$$a_n := 8 + 3(-1)^n \quad \text{und} \quad b_n := \frac{5n^2 + 10n + 4}{(n+1)^2}$$

(a) Bestimmen Sie eine reelle obere Schranke für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie eine reelle untere Schranke für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{}$

(c) Geben Sie eine reelle Zahl an, die sowohl eine untere Schranke für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch eine obere Schranke für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist: $\boxed{}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/3	/5	/2	/10	/7	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass A uneigentlich orthogonal ist:

$$(a, b, c) = \boxed{}$$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*)

Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2)$. Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (1,3)^\intercal,\ _{\mathbb{E}}P_1 = (2,2)^\intercal,\ _{\mathbb{E}}P_2 = (0,1)^\intercal.$$

Gesucht ist nun ein zweites Koordinatensystem $\mathbb{F}$ mit

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0,0)^\intercal,\ _{\mathbb{F}}P_1 = (1,0)^\intercal,\ _{\mathbb{F}}P_2 = (0,1)^\intercal.$$

Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ und die Koordinatentransformation $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an:

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{} ; \boxed{} , \boxed{} \right), \qquad {_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \left(\boxed{} \right) \cdot v + \left(\boxed{} \right).$$

Geben Sie außerdem die Koordinatentransformation $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an:

$${_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \left(\boxed{} \right) \cdot v + \left(\boxed{} \right).$$

Aufgabe 4 (*2 Punkte*)

Gegeben sei das Ellipsoid

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 |\ -3x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0\}$$

und die vom Parameter $d \in \mathbb{R}$ abhängige Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 |\, x_2 = d\}$. Geben Sie, falls möglich, ein $d \in \mathbb{R}$ so an, dass der Schnitt $Q \cap E_d$ die jeweils angegebene Gestalt hat. Falls dies nicht möglich ist, so tragen Sie „existiert nicht" in das Kästchen ein.

(a) $Q \cap E_d$ ist genau ein Punkt. $\boxed{}$

(b) $Q \cap E_d$ ist eine Gerade. $\boxed{}$

Aufgabe 5 (*10 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 | -2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2 - 1 = 0\}.$$

Geben Sie A, a und c für die Matrixbeschreibung $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ von Q an:

$$A = \boxed{}\ , \quad a = \boxed{}\ , \quad c = \boxed{}\ .$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A:

$$\lambda_1 = \boxed{}\ , \quad \lambda_2 = \boxed{}\ , \quad \lambda_3 = \boxed{}\ .$$

Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume:

$$V(\lambda_1) = \boxed{}\ , \quad V(\lambda_2) = \boxed{}\ , \quad V(\lambda_3) = \boxed{}\ .$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform hat. Geben Sie außerdem die Gestalt von Q an:

Euklidische Normalform: $\boxed{}$

Koordinatensystem: $\boxed{}$

Gestalt: $\boxed{}$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A_a = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom von A_a an:

$$\chi_{A_a}(\lambda) = \boxed{}$$

(b) Geben Sie alle Eigenwerte von A_4 an:

$$\lambda_1 = \boxed{}, \qquad \lambda_2 = \boxed{}.$$

(c) Finden Sie a so, dass $v = (2, -1)^\intercal$ ein Eigenvektor von A_a ist:

$$a = \boxed{}$$

(d) Für welchen Wert des Parameters a besitzt A_a nur einen Eigenwert λ? Geben Sie a, λ, die algebraische Vielfachheit e_λ und die geometrische Vielfachheit d_λ zu λ an:

$$a = \boxed{}, \quad \lambda = \boxed{}, \quad e_\lambda = \boxed{}, \quad d_\lambda = \boxed{}.$$

(e) Geben Sie für A_{-5} einen Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^2$ zum Eigenwert $\lambda = 1 + 3\mathrm{i}$ an:

$$v = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind gegeben durch

$$a_n := 7 + 2(-1)^n \quad \text{und} \quad b_n := \frac{5n^2 + 10n + 4}{(n+1)^2}$$

(a) Bestimmen Sie eine reelle obere Schranke für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie eine reelle untere Schranke für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{}$

(c) Geben Sie eine reelle Zahl an, die sowohl eine untere Schranke für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch eine obere Schranke für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist: $\boxed{}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/3	/5	/2	/10	/7	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & b & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass A eigentlich orthogonal ist:

$$(a, b, c) = \boxed{}$$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*)

Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2)$. Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (2,6)^\intercal,\ _{\mathbb{E}}P_1 = (1,2)^\intercal,\ _{\mathbb{E}}P_2 = (0,1)^\intercal.$$

Gesucht ist nun ein zweites Koordinatensystem $\mathbb{F}$ mit

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0,0)^\intercal,\ _{\mathbb{F}}P_1 = (1,0)^\intercal,\ _{\mathbb{F}}P_2 = (0,1)^\intercal.$$

Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ und die Koordinatentransformation $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an:

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{} ; \boxed{} , \boxed{} \right), \qquad {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \left(\boxed{} \right) \cdot v + \left(\boxed{} \right).$$

Geben Sie außerdem die Koordinatentransformation $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an:

$$_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \left(\boxed{} \right) \cdot v + \left(\boxed{} \right).$$

Aufgabe 4 (*2 Punkte*)

Gegeben sei das Ellipsoid

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 | -5x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 1 = 0\}$$

und die vom Parameter $d \in \mathbb{R}$ abhängige Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 | \, x_1 = d\}$. Geben Sie, falls möglich, ein $d \in \mathbb{R}$ so an, dass der Schnitt $Q \cap E_d$ die jeweils angegebene Gestalt hat. Falls dies nicht möglich ist, so tragen Sie „existiert nicht“ in das Kästchen ein.

(a) $Q \cap E_d$ ist eine Gerade. $\boxed{}$

(b) $Q \cap E_d$ ist genau ein Punkt. $\boxed{}$

Aufgabe 5 (*10 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 | \, x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_3 - 2x_2 + 1 = 0\}.$$

Geben Sie A, a und c für die Matrixbeschreibung $x^\mathsf{T} Ax + 2a^\mathsf{T} x + c = 0$ von Q an:

$A = \boxed{}$, $a = \boxed{}$, $c = \boxed{}$.

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A:

$\lambda_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$, $\lambda_3 = \boxed{}$.

Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume:

$V(\lambda_1) = \boxed{}$, $V(\lambda_2) = \boxed{}$, $V(\lambda_3) = \boxed{}$.

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform hat. Geben Sie außerdem die Gestalt von Q an:

Euklidische Normalform: $\boxed{}$

Koordinatensystem: $\boxed{}$

Gestalt: $\boxed{}$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A_a = \begin{pmatrix} -2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom von A_a an:

$$\chi_{A_a}(\lambda) = \boxed{}$$

(b) Geben Sie alle Eigenwerte von A_{-12} an:

$$\lambda_1 = \boxed{}, \qquad \lambda_2 = \boxed{}.$$

(c) Finden Sie a so, dass $v = (-1, 1)^\intercal$ ein Eigenvektor von A_a ist:

$$a = \boxed{}$$

(d) Für welchen Wert des Parameters a besitzt A_a nur einen Eigenwert λ? Geben Sie a, λ, die geometrische Vielfachheit d_λ und die algebraische Vielfachheit e_λ zu λ an:

$$a = \boxed{}, \quad \lambda = \boxed{}, \quad d_\lambda = \boxed{}, \quad e_\lambda = \boxed{}.$$

(e) Geben Sie für A_5 einen Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^2$ zum Eigenwert $\lambda = -1 + 3\mathrm{i}$ an:

$$v = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind gegeben durch

$$a_n := 6 + 3(-1)^n \quad \text{und} \quad b_n := \frac{3n^2 + 6n + 2}{(n+1)^2}$$

(a) Bestimmen Sie eine reelle obere Schranke für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie eine reelle untere Schranke für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{}$

(c) Geben Sie eine reelle Zahl an, die sowohl eine untere Schranke für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch eine obere Schranke für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist: $\boxed{}$
