

Name,
Vorname: Matrikel-
Nummer: Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/3	/5	/2	/10	/7	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Viel Erfolg!***Aufgabe 1** (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.Name des Tutors/der Tutorin: Gruppenr.: **Aufgabe 2** (3 Punkte) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & b & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass A eigentlich orthogonal ist:

$$(a, b, c) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right)$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Gegeben sei \mathbb{R}^2 mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2)$. Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$${}_{\mathbb{E}}P_0 = (3, 5)^{\top}, \quad {}_{\mathbb{E}}P_1 = (1, 4)^{\top}, \quad {}_{\mathbb{E}}P_2 = (0, 2)^{\top}.$$

Gesucht ist nun ein zweites Koordinatensystem \mathbb{F} mit

$${}_{\mathbb{F}}P_0 = (0, 0)^{\top}, \quad {}_{\mathbb{F}}P_1 = (1, 0)^{\top}, \quad {}_{\mathbb{F}}P_2 = (0, 1)^{\top}.$$

Geben Sie das Koordinatensystem \mathbb{F} und die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an:

$$\mathbb{F} = \left(\begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}; \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array} \right), \quad {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie außerdem die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} -2 \\ 7/3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Gegeben sei das Ellipsoid

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -2x_1^2 - 6x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0\}$$

und die vom Parameter $d \in \mathbb{R}$ abhängige Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = d\}$. Geben Sie, falls möglich, ein $d \in \mathbb{R}$ so an, dass der Schnitt $Q \cap E_d$ die jeweils angegebene Gestalt hat. Falls dies nicht möglich ist, so tragen Sie „existiert nicht“ in das Kästchen ein.

(a) $Q \cap E_d$ ist genau ein Punkt.

$$d = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

(b) $Q \cap E_d$ ist eine Gerade.

existiert nicht

Aufgabe 5 (10 Punkte) Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 2x_2 + 1 = 0\}.$$

Geben Sie A , a und c für die Matrixbeschreibung $x^\top Ax + 2a^\top x + c = 0$ von Q an:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = 1.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume:

$$V(\lambda_1) = \text{L} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad V(\lambda_2) = \text{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad V(\lambda_3) = \text{L} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform hat. Geben Sie außerdem die Gestalt von Q an:

Euklidische Normalform:

$$z_1^2 - 2z_2^2 + 3z_3^2 = 0$$

Koordinatensystem:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Gestalt:

Doppelkegel

Aufgabe 6 (7 Punkte) Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A_a = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom von A_a an:

$$\chi_{A_a}(\lambda) = \boxed{\lambda^2 - 2\lambda + a}$$

(b) Geben Sie alle Eigenwerte von A_{-3} an:

$$\lambda_1 = \boxed{-1}, \quad \lambda_2 = \boxed{3}.$$

(c) Finden Sie a so, dass $v = (4, -1)^\top$ ein Eigenvektor von A_a ist:

$$a = \boxed{-8}$$

(d) Für welchen Wert des Parameters a besitzt A_a nur einen Eigenwert λ ? Geben Sie a , λ , die algebraische Vielfachheit e_λ und die geometrische Vielfachheit d_λ zu λ an:

$$a = \boxed{1}, \quad \lambda = \boxed{1}, \quad e_\lambda = \boxed{2}, \quad d_\lambda = \boxed{1}.$$

(e) Geben Sie für A_5 einen Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^2$ zum Eigenwert $\lambda = 1 + 2i$ an:

$$v = \boxed{\begin{pmatrix} 1 + 2i \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 7 (3 Punkte) Die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind gegeben durch

$$a_n := 6 + 2(-1)^n \quad \text{und} \quad b_n := \frac{4n^2 + 8n + 3}{(n+1)^2}$$

(a) Bestimmen Sie eine reelle obere Schranke für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\boxed{8}$

(b) Bestimmen Sie eine reelle untere Schranke für $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\boxed{3}$

(c) Geben Sie eine reelle Zahl an, die sowohl eine untere Schranke für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als auch eine obere Schranke für $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist: $\boxed{4}$

Name,
Vorname: Matrikel-
Nummer: Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/3	/5	/2	/10	/7	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Viel Erfolg!***Aufgabe 1** (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.Name des Tutors/der Tutorin: Gruppenr.: **Aufgabe 2** (3 Punkte) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass A uneigentlich orthogonal ist:

$$(a, b, c) = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right)$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Gegeben sei \mathbb{R}^2 mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2)$. Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$${}_{\mathbb{E}}P_0 = (3, 1)^\top, \quad {}_{\mathbb{E}}P_1 = (1, 2)^\top, \quad {}_{\mathbb{E}}P_2 = (0, 1)^\top.$$

Gesucht ist nun ein zweites Koordinatensystem \mathbb{F} mit

$${}_{\mathbb{F}}P_0 = (0, 0)^\top, \quad {}_{\mathbb{F}}P_1 = (1, 0)^\top, \quad {}_{\mathbb{F}}P_2 = (0, 1)^\top.$$

Geben Sie das Koordinatensystem \mathbb{F} und die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an:

$$\mathbb{F} = \left(\begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}; \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array} \right), \quad {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie außerdem die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} -1 \\ 5/3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Gegeben sei das Ellipsoid

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -3x_1^2 - 5x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0\}$$

und die vom Parameter $d \in \mathbb{R}$ abhängige Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = d\}$. Geben Sie, falls möglich, ein $d \in \mathbb{R}$ so an, dass der Schnitt $Q \cap E_d$ die jeweils angegebene Gestalt hat. Falls dies nicht möglich ist, so tragen Sie „existiert nicht“ in das Kästchen ein.

(a) $Q \cap E_d$ ist eine Gerade.

existiert nicht

(b) $Q \cap E_d$ ist genau ein Punkt.

$$d = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Aufgabe 5 (10 Punkte) Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2 - 1 = 0\}.$$

Geben Sie A , a und c für die Matrixbeschreibung $x^\top Ax + 2a^\top x + c = 0$ von Q an:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = -1.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A :

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -2.$$

Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume:

$$V(\lambda_1) = \text{L} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad V(\lambda_2) = \text{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad V(\lambda_3) = \text{L} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform hat. Geben Sie außerdem die Gestalt von Q an:

Euklidische Normalform:

$$-z_1^2 + 3z_2^2 - 2z_3^2 = 0$$

Koordinatensystem:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Gestalt:

Doppelkegel

Aufgabe 6 (7 Punkte) Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A_a = \begin{pmatrix} -2 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom von A_a an:

$$\chi_{A_a}(\lambda) = \boxed{\lambda^2 + 2\lambda - a}$$

(b) Geben Sie alle Eigenwerte von A_3 an:

$$\lambda_1 = \boxed{-3}, \quad \lambda_2 = \boxed{1}.$$

(c) Finden Sie a so, dass $v = (5, -1)^\top$ ein Eigenvektor von A_a ist:

$$a = \boxed{15}$$

(d) Für welchen Wert des Parameters a besitzt A_a nur einen Eigenwert λ ? Geben Sie a , λ , die geometrische Vielfachheit d_λ und die algebraische Vielfachheit e_λ zu λ an:

$$a = \boxed{-1}, \quad \lambda = \boxed{-1}, \quad d_\lambda = \boxed{1}, \quad e_\lambda = \boxed{2}.$$

(e) Geben Sie für A_{-5} einen Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^2$ zum Eigenwert $\lambda = -1 + 2i$ an:

$$v = \boxed{\begin{pmatrix} -1 + 2i \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 7 (3 Punkte) Die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind gegeben durch

$$a_n := 8 + 3(-1)^n \quad \text{und} \quad b_n := \frac{5n^2 + 10n + 4}{(n+1)^2}$$

(a) Bestimmen Sie eine reelle obere Schranke für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\boxed{11}$

(b) Bestimmen Sie eine reelle untere Schranke für $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\boxed{4}$

(c) Geben Sie eine reelle Zahl an, die sowohl eine untere Schranke für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als auch eine obere Schranke für $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist: $\boxed{5}$

Name,
Vorname: Matrikel-
Nummer: Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/3	/5	/2	/10	/7	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Viel Erfolg!***Aufgabe 1** (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.Name des Tutors/der Tutorin: Gruppenr.: **Aufgabe 2** (3 Punkte) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass A uneigentlich orthogonal ist:

$$(a, b, c) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right)$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Gegeben sei \mathbb{R}^2 mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2)$. Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$${}_{\mathbb{E}}P_0 = (1, 3)^\top, \quad {}_{\mathbb{E}}P_1 = (2, 2)^\top, \quad {}_{\mathbb{E}}P_2 = (0, 1)^\top.$$

Gesucht ist nun ein zweites Koordinatensystem \mathbb{F} mit

$${}_{\mathbb{F}}P_0 = (0, 0)^\top, \quad {}_{\mathbb{F}}P_1 = (1, 0)^\top, \quad {}_{\mathbb{F}}P_2 = (0, 1)^\top.$$

Geben Sie das Koordinatensystem \mathbb{F} und die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an:

$$\mathbb{F} = \left(\begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}; \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array} \right), \quad {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie außerdem die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Gegeben sei das Ellipsoid

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -3x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0\}$$

und die vom Parameter $d \in \mathbb{R}$ abhängige Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = d\}$. Geben Sie, falls möglich, ein $d \in \mathbb{R}$ so an, dass der Schnitt $Q \cap E_d$ die jeweils angegebene Gestalt hat. Falls dies nicht möglich ist, so tragen Sie „existiert nicht“ in das Kästchen ein.

(a) $Q \cap E_d$ ist genau ein Punkt.

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(b) $Q \cap E_d$ ist eine Gerade.

existiert nicht

Aufgabe 5 (10 Punkte) Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2 - 1 = 0\}.$$

Geben Sie A , a und c für die Matrixbeschreibung $x^\top Ax + 2a^\top x + c = 0$ von Q an:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A :

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume:

$$V(\lambda_1) = \text{L} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad V(\lambda_2) = \text{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad V(\lambda_3) = \text{L} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform hat. Geben Sie außerdem die Gestalt von Q an:

Euklidische Normalform:

$$-z_1^2 + 2z_2^2 - 3z_3^2 = 0$$

Koordinatensystem:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Gestalt:

Doppelkegel

Aufgabe 6 (7 Punkte) Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A_a = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom von A_a an:

$$\chi_{A_a}(\lambda) = \boxed{\lambda^2 - 2\lambda - 2a}$$

(b) Geben Sie alle Eigenwerte von A_4 an:

$$\lambda_1 = \boxed{-2}, \quad \lambda_2 = \boxed{4}.$$

(c) Finden Sie a so, dass $v = (2, -1)^\top$ ein Eigenvektor von A_a ist:

$$a = \boxed{12}$$

(d) Für welchen Wert des Parameters a besitzt A_a nur einen Eigenwert λ ? Geben Sie a , λ , die algebraische Vielfachheit e_λ und die geometrische Vielfachheit d_λ zu λ an:

$$a = \boxed{-1/2}, \quad \lambda = \boxed{1}, \quad e_\lambda = \boxed{2}, \quad d_\lambda = \boxed{1}.$$

(e) Geben Sie für A_{-5} einen Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^2$ zum Eigenwert $\lambda = 1 + 3i$ an:

$$v = \boxed{\begin{pmatrix} 1 + 3i \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 7 (3 Punkte) Die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind gegeben durch

$$a_n := 7 + 2(-1)^n \quad \text{und} \quad b_n := \frac{5n^2 + 10n + 4}{(n+1)^2}$$

(a) Bestimmen Sie eine reelle obere Schranke für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\boxed{9}$

(b) Bestimmen Sie eine reelle untere Schranke für $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\boxed{4}$

(c) Geben Sie eine reelle Zahl an, die sowohl eine untere Schranke für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als auch eine obere Schranke für $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist: $\boxed{5}$

Name,
Vorname: Matrikel-
Nummer: Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/3	/5	/2	/10	/7	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Viel Erfolg!***Aufgabe 1** (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.Name des Tutors/der Tutorin: Gruppenr.: **Aufgabe 2** (3 Punkte) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & b & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass A eigentlich orthogonal ist:

$$(a, b, c) = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right)$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Gegeben sei \mathbb{R}^2 mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2)$. Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$${}_{\mathbb{E}}P_0 = (2, 6)^\top, \quad {}_{\mathbb{E}}P_1 = (1, 2)^\top, \quad {}_{\mathbb{E}}P_2 = (0, 1)^\top.$$

Gesucht ist nun ein zweites Koordinatensystem \mathbb{F} mit

$${}_{\mathbb{F}}P_0 = (0, 0)^\top, \quad {}_{\mathbb{F}}P_1 = (1, 0)^\top, \quad {}_{\mathbb{F}}P_2 = (0, 1)^\top.$$

Geben Sie das Koordinatensystem \mathbb{F} und die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an:

$$\mathbb{F} = \left(\begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}; \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array} \right), \quad {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie außerdem die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \begin{pmatrix} 5/3 & -2/3 \\ -4/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Gegeben sei das Ellipsoid

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -5x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 1 = 0\}$$

und die vom Parameter $d \in \mathbb{R}$ abhängige Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = d\}$. Geben Sie, falls möglich, ein $d \in \mathbb{R}$ so an, dass der Schnitt $Q \cap E_d$ die jeweils angegebene Gestalt hat. Falls dies nicht möglich ist, so tragen Sie „existiert nicht“ in das Kästchen ein.

(a) $Q \cap E_d$ ist eine Gerade.

existiert nicht

(b) $Q \cap E_d$ ist genau ein Punkt.

$$d = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Aufgabe 5 (10 Punkte) Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_3 - 2x_2 + 1 = 0\}.$$

Geben Sie A , a und c für die Matrixbeschreibung $x^\top Ax + 2a^\top x + c = 0$ von Q an:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = 1.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = 2.$$

Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume:

$$V(\lambda_1) = \text{L} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad V(\lambda_2) = \text{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad V(\lambda_3) = \text{L} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform hat. Geben Sie außerdem die Gestalt von Q an:

Euklidische Normalform:

$$z_1^2 - 3z_2^2 + 2z_3^2 = 0$$

Koordinatensystem:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Gestalt:

Doppelkegel

Aufgabe 6 (7 Punkte) Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A_a = \begin{pmatrix} -2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom von A_a an:

$$\chi_{A_a}(\lambda) = \boxed{\lambda^2 + 2\lambda + 2a}$$

(b) Geben Sie alle Eigenwerte von A_{-12} an:

$$\lambda_1 = \boxed{-6}, \quad \lambda_2 = \boxed{4}.$$

(c) Finden Sie a so, dass $v = (-1, 1)^\top$ ein Eigenvektor von A_a ist:

$$a = \boxed{-4}$$

(d) Für welchen Wert des Parameters a besitzt A_a nur einen Eigenwert λ ? Geben Sie a , λ , die geometrische Vielfachheit d_λ und die algebraische Vielfachheit e_λ zu λ an:

$$a = \boxed{1/2}, \quad \lambda = \boxed{-1}, \quad d_\lambda = \boxed{1}, \quad e_\lambda = \boxed{2}.$$

(e) Geben Sie für A_5 einen Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^2$ zum Eigenwert $\lambda = -1 + 3i$ an:

$$v = \boxed{\begin{pmatrix} 1 - 3i \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 7 (3 Punkte) Die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind gegeben durch

$$a_n := 6 + 3(-1)^n \quad \text{und} \quad b_n := \frac{3n^2 + 6n + 2}{(n+1)^2}$$

(a) Bestimmen Sie eine reelle obere Schranke für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\boxed{9}$

(b) Bestimmen Sie eine reelle untere Schranke für $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\boxed{2}$

(c) Geben Sie eine reelle Zahl an, die sowohl eine untere Schranke für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als auch eine obere Schranke für $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist: $\boxed{3}$