Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/4	/2	/3	/8	/3	/3	/7	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die Spur folgender Matrix:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Sp}(A) = \boxed{1+\sqrt{2}}\,.$$

Die Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax$ beschreibt eine Drehung. Bestimmen Sie die Drehachse g und den Drehwinkel φ von α, sowie die Determinante von A:

$$g = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}, \quad \varphi = \boxed{\frac{\pi}{4} \text{ bzw. } \frac{7\pi}{4}}, \quad \det(A) = \boxed{1}\,.$$

Aufgabe 3 (*2 Punkte*)

Gegeben sei $\mathbb{R}^3$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$. Darin sind die Punkte P_0, P_1, P_2 und P_3 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (2,3,4)^\intercal,\ _{\mathbb{E}}P_1 = (2,2,3)^\intercal,\ _{\mathbb{E}}P_2 = (0,3,1)^\intercal,\ _{\mathbb{E}}P_3 = (1,3,1)^\intercal.$$

Gesucht ist nun ein zweites Koordinatensystem $\mathbb{F}$ mit

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0,0,0)^\intercal,\ _{\mathbb{F}}P_1 = (1,0,0)^\intercal,\ _{\mathbb{F}}P_2 = (0,1,0)^\intercal,\ _{\mathbb{F}}P_3 = (0,0,1)^\intercal.$$

Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an:

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}} ; \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}} , \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}} , \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}} \right)$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*)

Gegeben sei die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik

$$Q_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 - (2-\alpha)x_2^2 - 3x_3^2 + 1 = 0\}$$

und die Ebene $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}$. Geben Sie, falls möglich, ein $\alpha \in \mathbb{R}$ so an, dass der Schnitt $Q_\alpha \cap E$ die jeweils angegebene Gestalt hat. Falls dies nicht möglich ist, so tragen Sie „existiert nicht" in das Kästchen ein.

(a) $Q_\alpha \cap E$ ist ein Kreis. $\boxed{\alpha = -1}$

(b) $Q_\alpha \cap E$ ist ein schneidendes Geradenpaar. $\boxed{\text{existiert nicht}}$

(c) $Q_\alpha \cap E$ ist ein paralleles Geradenpaar. $\boxed{\alpha = 2}$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x_1^2 - 5x_2^2 + 6x_1x_2 + 6 = 0 \right\}.$$

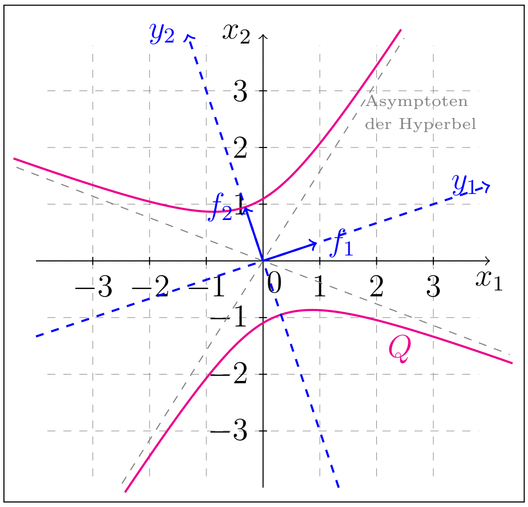
Geben Sie A, a und c für die Matrixbeschreibung $x^\mathsf{T} A x + 2a^\mathsf{T} x + c = 0$ von Q an:

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}}, \quad a = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \quad c = \boxed{6}.$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform hat, und geben Sie die Gestalt von Q an:

Euklidische Normalform	$\frac{2}{3}y_1^2 - y_2^2 + 1 = 0$
Koordinatensystem	$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$
Gestalt	Hyperbel

Skizzieren Sie das neue Koordinatensystem samt der Quadrik Q im Standardkoordinatensystem.



Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind gegeben durch

$$a_n := 6 + \frac{1}{n} + 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad b_n := \frac{(3n+3)(n+2)}{n^2+4n+4}.$$

(a) Bestimmen Sie eine reelle obere Schranke für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{9}$

(b) Bestimmen Sie eine reelle untere Schranke für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{2}$

(c) Geben Sie eine reelle Zahl an, die sowohl eine untere Schranke für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch eine obere Schranke für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist: $\boxed{4}$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie, Beschränktheit, Konvergenz und bestimmen Sie den kleinsten Häufungspunkt. Tragen Sie für die Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz entweder **Ja** oder **Nein**, sowie den $\varliminf\limits_{n\to\infty}$ der Folgen, in die Kästen ein.

	Monoton	Beschränkt	Konvergent	$\varliminf\limits_{n\to\infty}$
$a_n = -5 + 4^{-5n}$	Ja	Ja	Ja	-5
$b_n = 3 + (-1)^n$	Nein	Ja	Nein	2
$c_n = (-1)^n(2n+8)$	Nein	Nein	Nein	$-\infty$

Aufgabe 8 (*7 Punkte*) Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A_a = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom von A_a an:

$$\chi_{A_a}(\lambda) = \boxed{\lambda^2 - 6\lambda - 2a + 8}$$

(b) Finden Sie a so, dass $v = (3, -2)^\intercal$ ein Eigenvektor von A_a ist:

$$a = \boxed{3/2}$$

(c) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ von A_{-5} an:

$$\lambda_1 = \boxed{3 - 3\mathrm{i}}, \qquad \lambda_2 = \boxed{3 + 3\mathrm{i}}.$$

(d) Für welchen Wert des Parameters a besitzt A_a nur einen Eigenwert λ?
Geben Sie a, λ und den zugehörigen Eigenraum $V(\lambda)$ an:

$$a = \boxed{-1/2}, \quad \lambda = \boxed{3}, \quad V(\lambda) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}.$$

(e) Für welche Parameter a lässt sich die Matrix A_a diagonalisieren?

$$\boxed{a \neq -1/2}$$
