Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studiengang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/6	/4	/4	/3	/5	/3	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*6 Punkte*)

Die Ebene E wird aufgespannt durch die Punkte $P_1 = (2,3,4)$, $P_2 = (6,4,7)$ und $P_3 = (10,6,10)$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E:

$$E = \left(\boxed{}\right) + \mathbb{R}\left(\boxed{}\right) + \mathbb{R}\left(\boxed{}\right)$$

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E, also eine Gleichung der Form $\langle n|x\rangle = d$ mit normiertem Normalenvektor

$$n = \left(\boxed{}\right) \quad \text{und} \quad d = \boxed{}\,.$$

(c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q = (4,-1,8)$ von der Ebene E: $\boxed{}$.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Basen $K\colon \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$ und $L\colon \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{C}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ sowie der Vektor $v \in \mathbb{C}^2$ mit

$$_K v = \begin{pmatrix} 3 \\ 6\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis $E\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Basis L an:

$$_E v = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \qquad _L v = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 8 \end{aligned}$$

$\mathcal{L} =$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2} &= -2 \\ -x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$\mathcal{L} =$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben seien die Matrizen $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 3\alpha & 0 \end{pmatrix}$ und $B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \alpha \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A_α und B_α in Abhängigkeit von α:

$\det(A_\alpha) =$ $\qquad$ $\det(B_\alpha) =$

(b) Geben Sie an, für welche Werte von α die Matrix A_α nicht invertierbar ist:

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Die reelle Matrix A_α ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben durch $$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \alpha - 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ der Matrix A_α in Abhängigkeit von α:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \boxed{} \cdot \lambda^2 \quad + \boxed{} \cdot \lambda \quad + \boxed{} .$$

Zerlegen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ in Linearfaktoren:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \left(\boxed{} - \lambda \right) \cdot \left(\boxed{} - \lambda \right).$$

Geben Sie zwei linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix A_α für $\alpha = 16$ an:

$$v_1 = \left(\boxed{} \right) \quad v_2 = \left(\boxed{} \right).$$

Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die A_α nur reelle Eigenwerte besitzt: $\boxed{}$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Betrachten Sie die affine Abbildung $$\alpha \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Der lineare Anteil von α ist durch eine orthogonale Matrix gegeben. Berechnen Sie:

$$\left| \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \boxed{}$$

(b) Der lineare Anteil von α definiert die lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Sei E die Standardbasis und $B : (1, -1)^\intercal, (0, 1)^\intercal$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$ und ${}_B\varphi_B$:

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \boxed{} \qquad {}_B\varphi_B = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Gegeben sei die Quadrik
$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 8 = 0 \right\}.$$

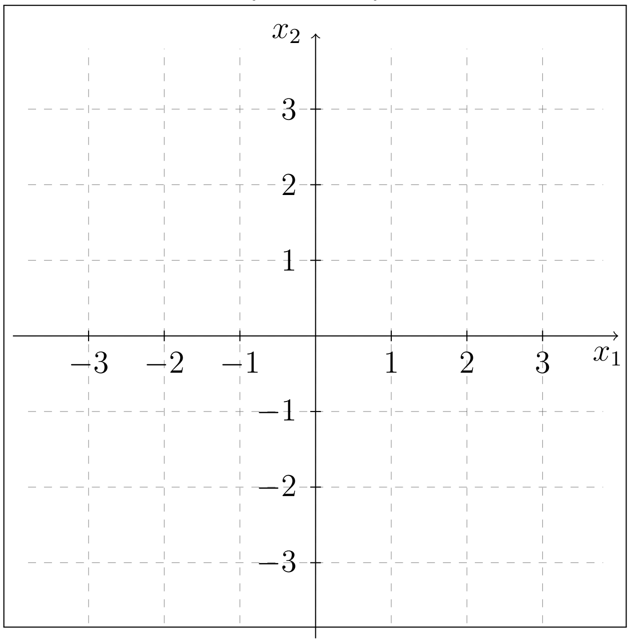
(a) Die Matrixbeschreibung der Quadrik ist gegeben durch $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $a \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie A, a und c an:

$A =$ $a =$ $c =$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q:

(c) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in welchem Q in dieser euklidischen Normalform vorliegt:

(d) Zeichnen Sie die Quadrik Q und das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ im Standardkoordinatensystem:



Name, Vorname: ______ **Matrikel-Nummer:** ______ **Studien-gang:** ______

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/6	/4	/4	/3	/5	/3	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Name des Tutors/der Tutorin: ______ **Gruppennr.:** ______

Aufgabe 2 (*6 Punkte*)

Die Ebene E wird aufgespannt durch die Punkte $P_1 = (1,3,6)$, $P_2 = (4,11,12)$ und $P_3 = (2,7,9)$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E:

$$E = \left(\boxed{} \right) + \mathbb{R} \left(\boxed{} \right) + \mathbb{R} \left(\boxed{} \right)$$

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E, also eine Gleichung der Form $\langle n|x\rangle = d$ mit normiertem Normalenvektor $n = \left(\boxed{} \right)$ und $d = \boxed{}$.

(c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q = (2,-6,3)$ von der Ebene E: $\boxed{}$.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Basen $K\colon \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $L\colon \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$ von $\mathbb{C}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ sowie der Vektor $v \in \mathbb{C}^2$ mit

$$_K v = \begin{pmatrix} 4 \\ 8\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis $E\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Basis L an:

$$_E v = \left(\boxed{} \right) \qquad _L v = \left(\boxed{} \right).$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad - 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$\mathcal{L} =$ $\boxed{}$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 \qquad\ &= 1 \\ -x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$\mathcal{L} =$ $\boxed{}$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben seien die Matrizen $A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3\alpha & 0 \end{pmatrix}$ und $B_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & \alpha \\ -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A_α und B_α in Abhängigkeit von α:

$\det(A_\alpha) =$ $\boxed{}$ $\qquad$ $\det(B_\alpha) =$ $\boxed{}$

(b) Geben Sie an, für welche Werte von α die Matrix A_α nicht invertierbar ist:

$\boxed{}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Die reelle Matrix A_α ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben durch $A_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & \alpha - 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ der Matrix A_α in Abhängigkeit von α:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \boxed{} \cdot \lambda^2 + \boxed{} \cdot \lambda + \boxed{}.$$

Zerlegen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ in Linearfaktoren:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \left(\boxed{} - \lambda\right) \cdot \left(\boxed{} - \lambda\right).$$

Geben Sie zwei linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix A_α für $\alpha = 3$ an:

$$v_1 = \left(\boxed{}\right) \quad v_2 = \left(\boxed{}\right).$$

Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die A_α nur reelle Eigenwerte besitzt: $\boxed{}$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Betrachten Sie die affine Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Der lineare Anteil von α ist durch eine orthogonale Matrix gegeben. Berechnen Sie:

$$\left| \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \boxed{}$$

(b) Der lineare Anteil von α definiert die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Sei E die Standardbasis und $B : (0,1)^\intercal, (1,-1)^\intercal$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$ und ${}_B\varphi_B$:

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \boxed{} \qquad {}_B\varphi_B = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Gegeben sei die Quadrik $$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 8 = 0 \right\}.$$

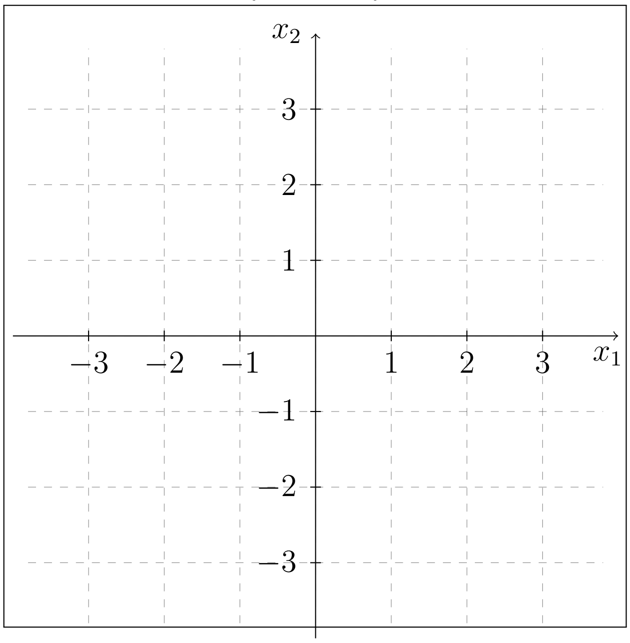
(a) Die Matrixbeschreibung der Quadrik ist gegeben durch $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $a \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie A, a und c an:

$A = \boxed{}$ $a = \boxed{}$ $c = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q:

(c) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in welchem Q in dieser euklidischen Normalform vorliegt:

(d) Zeichnen Sie die Quadrik Q und das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ im Standardkoordinatensystem:



Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/6	/4	/4	/3	/5	/3	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*6 Punkte*)

Die Ebene E wird aufgespannt durch die Punkte $P_1 = (1, 8, 7)$, $P_2 = (7, 16, 10)$ und $P_3 = (4, 12, 8)$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E:

$$E = \left(\boxed{}\right) + \mathbb{R}\left(\boxed{}\right) + \mathbb{R}\left(\boxed{}\right)$$

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E, also eine Gleichung der Form $\langle n|x\rangle = d$ mit normiertem Normalenvektor

$$n = \left(\boxed{}\right) \quad \text{und} \quad d = \boxed{}\,.$$

(c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q = (-7, 4, 3)$ von der Ebene E: $\boxed{}$.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Basen $K\colon \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $L\colon \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$ von $\mathbb{C}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ sowie der Vektor $v \in \mathbb{C}^2$ mit

$$_K v = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis $E\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Basis L an:

$$_E v = \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix} \qquad _L v = \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 3x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -4 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & = & -5 \end{array} \qquad \mathcal{L} = \boxed{}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 5 \end{array} \qquad \mathcal{L} = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben seien die Matrizen
$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 3\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & \alpha \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A_α und B_α in Abhängigkeit von α:

$$\det(A_\alpha) = \boxed{} \qquad \det(B_\alpha) = \boxed{}$$

(b) Geben Sie an, für welche Werte von α die Matrix A_α nicht invertierbar ist:

$$\boxed{}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Die reelle Matrix A_α ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben durch $A_\alpha = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ \alpha - 7 & -2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ der Matrix A_α in Abhängigkeit von α:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \boxed{} \cdot \lambda^2 + \boxed{} \cdot \lambda + \boxed{} .$$

Zerlegen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ in Linearfaktoren:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \left(\boxed{} - \lambda\right) \cdot \left(\boxed{} - \lambda\right).$$

Geben Sie zwei linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix A_α für $\alpha = 1$ an:

$$v_1 = \left(\boxed{}\right) \quad v_2 = \left(\boxed{}\right).$$

Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die A_α nur reelle Eigenwerte besitzt: $\boxed{}$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Betrachten Sie die affine Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Der lineare Anteil von α ist durch eine orthogonale Matrix gegeben. Berechnen Sie:

$$\left| \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \boxed{}$$

(b) Der lineare Anteil von α definiert die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Sei E die Standardbasis und $B : (-1,1)^\intercal, (0,1)^\intercal$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$ und ${}_B\varphi_B$:

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \boxed{} \qquad {}_B\varphi_B = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Gegeben sei die Quadrik
$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 9 = 0 \right\}.$$

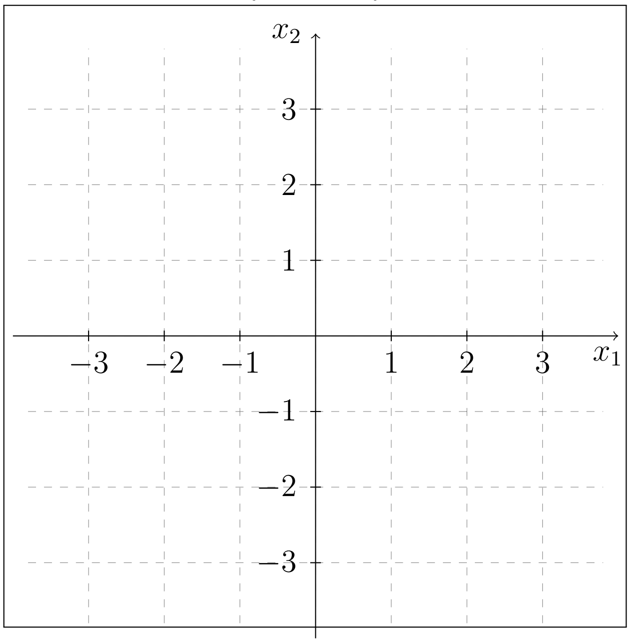
(a) Die Matrixbeschreibung der Quadrik ist gegeben durch $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $a \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie A, a und c an:

$A =$ $\qquad$ $a =$ $\qquad$ $c =$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q:

(c) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in welchem Q in dieser euklidischen Normalform vorliegt:

(d) Zeichnen Sie die Quadrik Q und das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ im Standardkoordinatensystem:



Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/6	/4	/4	/3	/5	/3	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*6 Punkte*)

Die Ebene E wird aufgespannt durch die Punkte $P_1 = (4, 0, 5)$, $P_2 = (7, 6, 13)$ und $P_3 = (5, 3, 9)$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E:

$$E = \left(\boxed{}\right) + \mathbb{R}\left(\boxed{}\right) + \mathbb{R}\left(\boxed{}\right)$$

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E, also eine Gleichung der Form $\langle n|x\rangle = d$ mit normiertem Normalenvektor

$$n = \left(\boxed{}\right) \quad \text{und} \quad d = \boxed{}\,.$$

(c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q = (3, -8, -4)$ von der Ebene E: $\boxed{}\,.$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Basen $K\colon \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$ und $L\colon \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{C}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ sowie der Vektor $v \in \mathbb{C}^2$ mit

$$_K v = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis $E\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Basis L an:

$$_E v = \left(\boxed{} \right) \qquad _L v = \left(\boxed{} \right).$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 3x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 7 \end{array} \qquad \mathcal{L} = \boxed{}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & = & -4 \\ x_1 & + & x_2 & = & 0 \end{array} \qquad \mathcal{L} = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben seien die Matrizen $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3\alpha & 0 \end{pmatrix}$ und $B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & \alpha \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A_α und B_α in Abhängigkeit von α:

$$\det(A_\alpha) = \boxed{} \qquad \det(B_\alpha) = \boxed{}$$

(b) Geben Sie an, für welche Werte von α die Matrix A_α nicht invertierbar ist:

$$\boxed{}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Die reelle Matrix A_α ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben durch $A_\alpha = \begin{pmatrix} 6 & \alpha - 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ der Matrix A_α in Abhängigkeit von α:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \boxed{} \cdot \lambda^2 + \boxed{} \cdot \lambda + \boxed{}.$$

Zerlegen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ in Linearfaktoren:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \left(\boxed{} - \lambda\right) \cdot \left(\boxed{} - \lambda\right).$$

Geben Sie zwei linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix A_α für $\alpha = 10$ an:

$$v_1 = \left(\boxed{}\right) \quad v_2 = \left(\boxed{}\right).$$

Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die A_α nur reelle Eigenwerte besitzt: $\boxed{}$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Betrachten Sie die affine Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Der lineare Anteil von α ist durch eine orthogonale Matrix gegeben. Berechnen Sie:

$$\left| \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \boxed{}$$

(b) Der lineare Anteil von α definiert die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Sei E die Standardbasis und $B : (0,1)^\intercal, (-1,1)^\intercal$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$ und ${}_B\varphi_B$:

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \boxed{} \qquad {}_B\varphi_B = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Gegeben sei die Quadrik $$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 9 = 0 \right\}.$$

(a) Die Matrixbeschreibung der Quadrik ist gegeben durch $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $a \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie A, a und c an:

$A =$ $a =$ $c =$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q:

(c) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in welchem Q in dieser euklidischen Normalform vorliegt:

(d) Zeichnen Sie die Quadrik Q und das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ im Standardkoordinatensystem: