Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/4	/3	/4	/6	/6	/31

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{9}\right)^k (z+3)^k$	$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{9}(z^2+4\mathrm{i}z-4)\right)^k$	$\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{2+(-1)^k}{3\mathrm{e}^4}\right)^k (z+5\mathrm{i}-2)^k$
z_0	-3	$-2\mathrm{i}$	$2-5\mathrm{i}$
ρ	9	3	e^4

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Berechnen Sie:

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-4)^k}$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^3+x}{x^4+2}$	$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-2x)}{x^2-x-2}$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{(4x+3)^2}{\sqrt{1+4x^4}}$
$\frac{4}{5}$	0	$\frac{2}{3}$	8

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \exp\left((x-2)^2\right).$$

Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von f.

$$f'(x) = \exp\left((x-2)^2\right)\, 2(x-2)$$

$$f''(x) = \exp\left((x-2)^2\right)\, (4x^2-16x+18)$$

Stellen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,x,0)$ der Stufe 2 um den Entwicklungspunkt 0 auf.

$$T_2(f,x,0) = \mathrm{e}^4 - 4\mathrm{e}^4 x + 9\mathrm{e}^4 x^2$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Auf dem Intervall $I = (0,1)$ seien durch

$$f_1(x) = \frac{4}{4-x^2}\,, \qquad f_2(x) = \frac{8}{4x^2+1}\,, \qquad f_3(x) = 2\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{x}\,,$$

$$G_1(x) = 4\arctan(2x)\,, \quad G_2(x) = -4\cosh(x)\,, \quad G_3(x) = \ln\left|\frac{8-x^2}{2\mathrm{e}^x}\right|, \quad G_4(x) = \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|$$

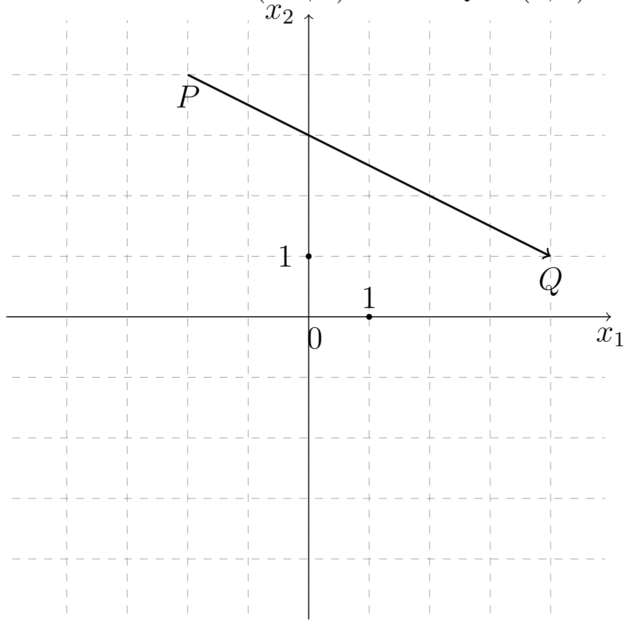
die Funktionen f_j und G_k definiert.

Geben Sie für jedes j an, welche der Funktionen G_k eine Stammfunktion von f_j ist.
Tragen Sie dazu jeweils „G_1“, „G_2“, „G_3“ oder „G_4“ in das betreffende Kästchen ein.

Die Funktion	G_4	G_1	G_2
ist eine Stammfunktion von	f_1	f_2	f_3

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Geben Sie eine Parametrisierung C der abgebildeten Kurve K an.

Strecke von $P = (-2,4)^\intercal$ nach $Q = (4,1)^\intercal$



$$C \colon \boxed{[0,1]} \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -2+6t \\ 4-3t \end{pmatrix}}$$

Berechnen Sie: $C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}}$

Bestimmen Sie ein Potential U des Vektorfelds

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon (x_1,x_2)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} 3x_2^2 \\ 6x_1x_2+1 \end{pmatrix}. \qquad U \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x_1,x_2)^\intercal \mapsto \boxed{3x_1x_2^2 + x_2}$$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{105}$

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

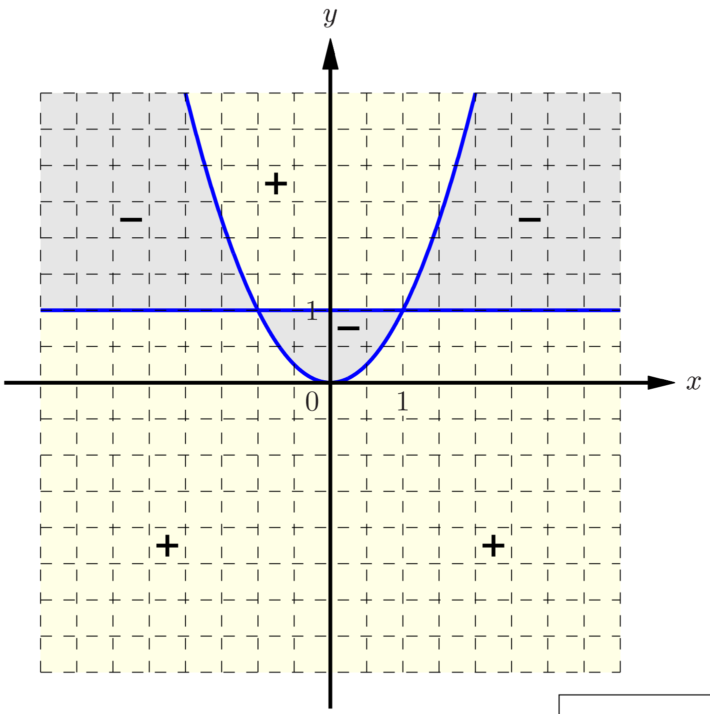
$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[4x^{1/4}\right]} \qquad \int_0^{\pi/2} \sin(3x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\int (x-2)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}\right]} \qquad \int_0^{+\infty} (x-2)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \boxed{-1}$$

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right]}$$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (3 - 3y)(x^2 - y)$.

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ von f für $-4 \leqq x \leqq 4$ und $-4 \leqq y \leqq 4$, und markieren Sie die Bereiche, in denen f positive bzw. negative Werte annimmt, mit „+" bzw. „−".



(b) Berechnen Sie: $\operatorname{grad} f(x, y) = \boxed{\begin{pmatrix} 6x - 6xy \\ -3 + 6y - 3x^2 \end{pmatrix}}$

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und geben Sie jeweils deren Typ an.

Kritische Stelle	Typ
$(1, 1)$	Sattelpunkt
$(-1, 1)$	Sattelpunkt
$(0, \frac{1}{2})$	lokales Minimum

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/4	/3	/4	/6	/6	/31

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^k (z-5)^k$	$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{16}(z^2+6\mathrm{i}z-9)\right)^k$	$\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{3+(-1)^k}{4\mathrm{e}^5}\right)^k (z+3-6\mathrm{i})^k$
z_0	5	$-3\mathrm{i}$	$-3+6\mathrm{i}$
ρ	7	4	e^5

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Berechnen Sie:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x^3+x}{2x^4+2}$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{3^k}$	$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(2x^2-6x)}{x^2-x-6}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(3x+2)^2}{\sqrt{1+16x^4}}$
0	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{6}{5}$	$\dfrac{9}{4}$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \exp\left((x+2)^2\right).$$

Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von f.

$$f'(x) = \boxed{\exp\left((x+2)^2\right)\, 2(x+2)}$$

$$f''(x) = \boxed{\exp\left((x+2)^2\right)\, (4x^2+16x+18)}$$

Stellen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,x,0)$ der Stufe 2 um den Entwicklungspunkt 0 auf.

$$T_2(f,x,0) = \boxed{e^4 + 4e^4x + 9e^4x^2}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Auf dem Intervall $I = (0,1)$ seien durch

$$f_1(x) = \frac{2}{4+x^2}\,, \qquad f_2(x) = \frac{4}{x^2-4}\,, \qquad f_3(x) = 2e^{-x} + 2e^x\,,$$

$$G_1(x) = 4\sinh(x)\,, \quad G_2(x) = \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\,, \quad G_3(x) = \arctan\left(\frac{x}{2}\right), \quad G_4(x) = \ln\left|\frac{2-x^2}{4e^x}\right|$$

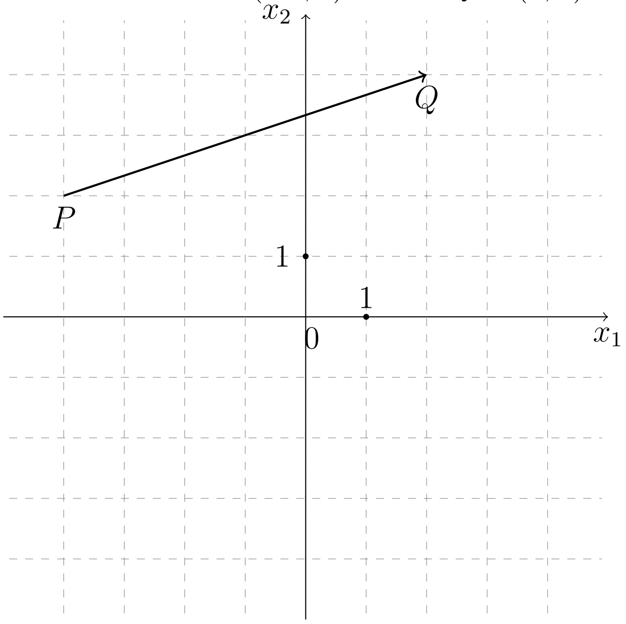
die Funktionen f_j und G_k definiert.

Geben Sie für jedes j an, welche der Funktionen G_k eine Stammfunktion von f_j ist.
Tragen Sie dazu jeweils „G_1“, „G_2“, „G_3“ oder „G_4“ in das betreffende Kästchen ein.

Die Funktion	G_3	G_2	G_1
ist eine Stammfunktion von	f_1	f_2	f_3

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Geben Sie eine Parametrisierung C der abgebildeten Kurve K an.

Strecke von $P = (-4, 2)^\intercal$ nach $Q = (2, 4)^\intercal$



$$C\colon \boxed{[0,1]} \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -4+6t \\ 2+2t \end{pmatrix}}$$

Berechnen Sie: $C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}}$

Bestimmen Sie ein Potential U des Vektorfelds

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1, x_2)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1x_2 \\ 2x_1^2+1 \end{pmatrix}. \qquad U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1,x_2)^\intercal \mapsto \boxed{2x_1^2x_2 + x_2}$$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{-30}$

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

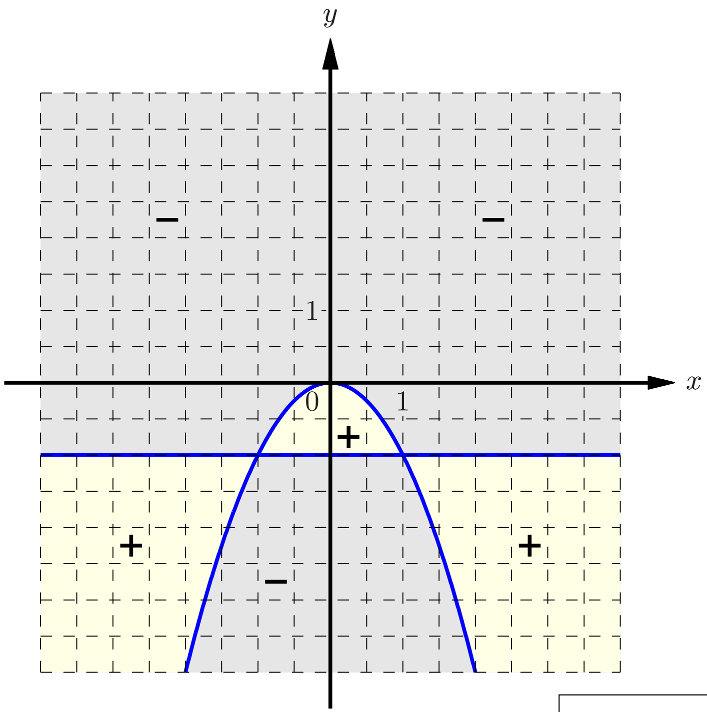
$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\Big[-4x^{-1/4}\Big]} \qquad \int_0^{\pi/4} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\int (x-3)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\Big[(2-x)\,\mathrm{e}^{-x}\Big]} \qquad \int_0^{+\infty} (x-3)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \boxed{-2}$$

$$\int \frac{3}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\right]}$$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (-2y - 2)(y + x^2)$.

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ von f für $-4 \leqq x \leqq 4$ und $-4 \leqq y \leqq 4$, und markieren Sie die Bereiche, in denen f positive bzw. negative Werte annimmt, mit „+“ bzw. „−“.



(b) Berechnen Sie: $\operatorname{grad} f(x, y) = \boxed{\begin{pmatrix} -4x - 4xy \\ -2 - 4y - 2x^2 \end{pmatrix}}$

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und geben Sie jeweils deren Typ an.

Kritische Stelle	Typ
$(1, -1)$	Sattelpunkt
$(-1, -1)$	Sattelpunkt
$(0, -\frac{1}{2})$	lokales Maximum

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/4	/3	/4	/6	/6	/31

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\, x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\, b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^k (z+7)^k$	$\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{36}(z^2-6\mathrm{i}z-9)\right)^k$	$\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{4+(-1)^k}{5\mathrm{e}^6}\right)^k (z+1+3\mathrm{i})^k$
z_0	-7	$3\mathrm{i}$	$-1-3\mathrm{i}$
ρ	5	6	e^6

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Berechnen Sie:

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k}$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+x}{3x^4+2}$	$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-x-2)}{x^2-2x}$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{(6x+1)^2}{\sqrt{1+9x^4}}$
$\frac{4}{3}$	0	$\frac{3}{2}$	12

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \exp\left((x-3)^2\right).$$

Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von f.

$$f'(x) = \boxed{\exp\left((x-3)^2\right)\, 2(x-3)}$$

$$f''(x) = \boxed{\exp\left((x-3)^2\right)\, (4x^2-24x+38)}$$

Stellen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,x,0)$ der Stufe 2 um den Entwicklungspunkt 0 auf.

$$T_2(f,x,0) = \boxed{\mathrm{e}^9 - 6\mathrm{e}^9 x + 19\mathrm{e}^9 x^2}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Auf dem Intervall $I = (0,1)$ seien durch

$$f_1(x) = 3\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{-x}, \qquad f_2(x) = \frac{6}{9-x^2}, \qquad f_3(x) = \frac{6}{9x^2+1},$$

$$G_1(x) = \ln\left|\frac{6-x^2}{3\mathrm{e}^x}\right|, \quad G_2(x) = 2\arctan(3x), \quad G_3(x) = \ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|, \quad G_4(x) = 6\cosh(x)$$

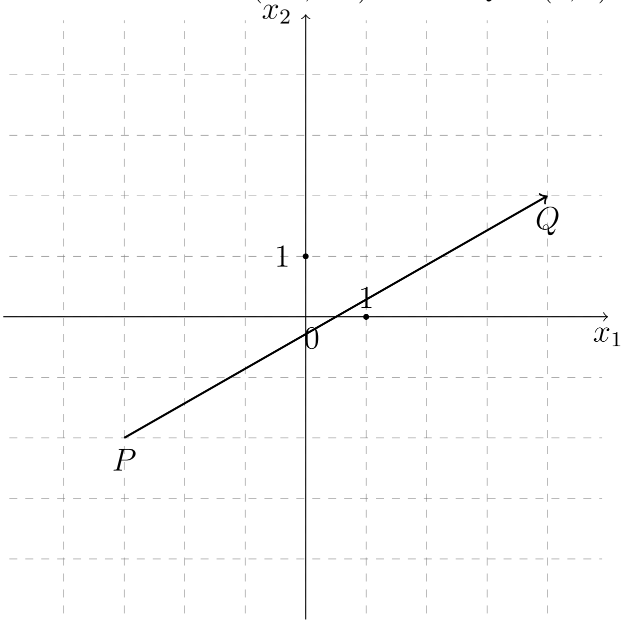
die Funktionen f_j und G_k definiert.

Geben Sie für jedes j an, welche der Funktionen G_k eine Stammfunktion von f_j ist.
Tragen Sie dazu jeweils „G_1“, „G_2“, „G_3“ oder „G_4“ in das betreffende Kästchen ein.

Die Funktion	G_4	G_3	G_2
ist eine Stammfunktion von	f_1	f_2	f_3

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Geben Sie eine Parametrisierung C der abgebildeten Kurve K an.

Strecke von $P = (-3,-2)^\intercal$ nach $Q = (4,2)^\intercal$



$$C\colon \boxed{[0,1]} \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -3+7t \\ -2+4t \end{pmatrix}}$$

Berechnen Sie: $C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}}$

Bestimmen Sie ein Potential U des Vektorfelds

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1,x_2)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} 5x_2^2 \\ 10x_1x_2+1 \end{pmatrix}. \qquad U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1,x_2)^\intercal \mapsto \boxed{5x_1x_2^2 + x_2}$$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{144}$

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

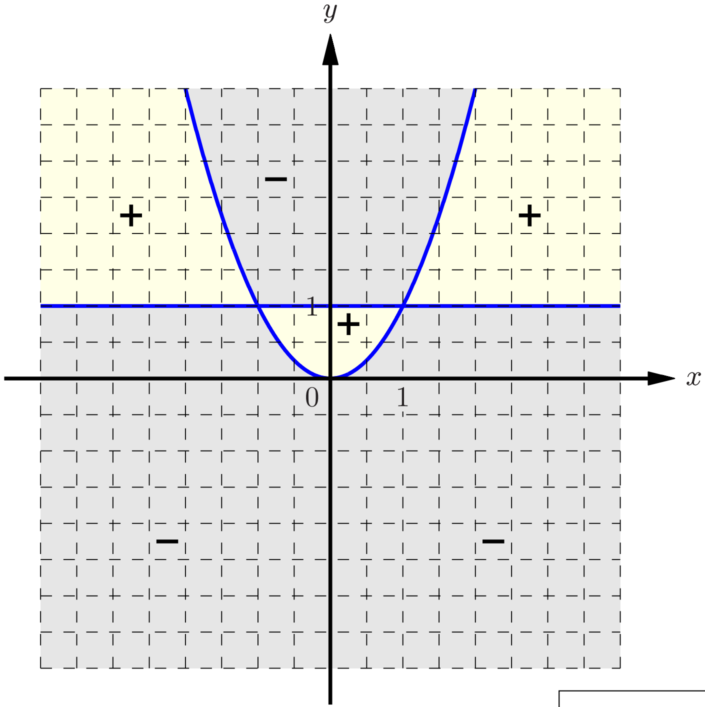
$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[3x^{1/3}\right]} \qquad \int_0^{\pi/2} \cos(3x)\,\mathrm{d}x = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

$$\int (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[-(x+3)\,\mathrm{e}^{-x}\right]} \qquad \int_0^{+\infty} (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \boxed{3}$$

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right]}$$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (3y-3)(x^2-y)$.

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ von f für $-4 \leqq x \leqq 4$ und $-4 \leqq y \leqq 4$, und markieren Sie die Bereiche, in denen f positive bzw. negative Werte annimmt, mit „+" bzw. „−".



(b) Berechnen Sie: $\quad \operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} -6x + 6xy \\ 3 - 6y + 3x^2 \end{pmatrix}$

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und geben Sie jeweils deren Typ an.

Kritische Stelle	Typ
$(1, 1)$	Sattelpunkt
$(-1, 1)$	Sattelpunkt
$(0, \frac{1}{2})$	lokales Maximum

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/4	/3	/4	/6	/6	/31

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k (z-9)^k$	$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{25}(z^2-4\mathrm{i}z-4)\right)^k$	$\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{5+(-1)^k}{6\mathrm{e}^7}\right)^k (z+8\mathrm{i}-5)^k$
z_0	9	$2\mathrm{i}$	$5-8\mathrm{i}$
ρ	3	5	e^7

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Berechnen Sie:

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-3)^k}$	$\lim_{x\to 3} \frac{\sin(x^2-x-6)}{2x^2-6x}$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3+x}{4x^4+2}$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+4)^2}{\sqrt{1+25x^4}}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	0	$\frac{4}{5}$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \exp\left((x+3)^2\right).$$

Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von f.

$$f'(x) = \boxed{\exp\left((x+3)^2\right)\, 2(x+3)}$$

$$f''(x) = \boxed{\exp\left((x+3)^2\right)\, (4x^2+24x+38)}$$

Stellen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,x,0)$ der Stufe 2 um den Entwicklungspunkt 0 auf.

$$T_2(f,x,0) = \boxed{e^9 + 6e^9 x + 19e^9 x^2}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Auf dem Intervall $I = (0,1)$ seien durch

$$f_1(x) = 3e^x + 3e^{-x}, \qquad f_2(x) = \frac{15}{1+25x^2}, \qquad f_3(x) = \frac{6}{x^2-9},$$

$$G_1(x) = \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|, \quad G_2(x) = \ln\left|\frac{x^2-3}{6e^x}\right|, \quad G_3(x) = 6\sinh(x), \quad G_4(x) = 3\arctan(5x)$$

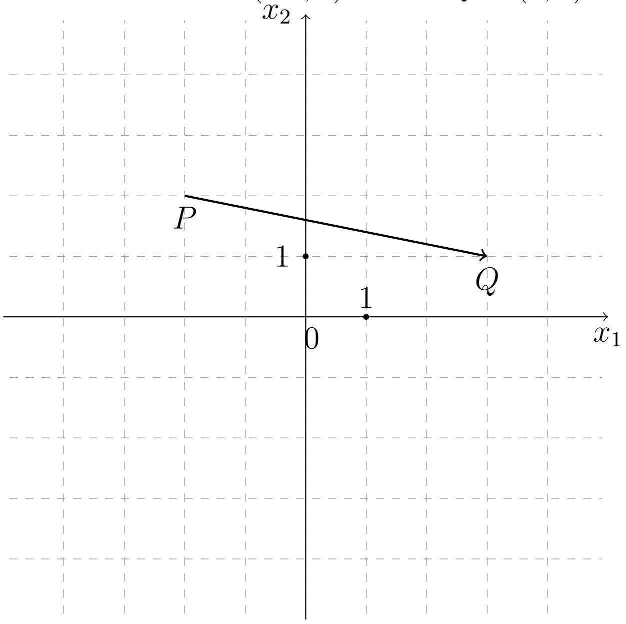
die Funktionen f_j und G_k definiert.

Geben Sie für jedes j an, welche der Funktionen G_k eine Stammfunktion von f_j ist.
Tragen Sie dazu jeweils „G_1", „G_2", „G_3" oder „G_4" in das betreffende Kästchen ein.

Die Funktion	G_3	G_4	G_1
ist eine Stammfunktion von	f_1	f_2	f_3

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Geben Sie eine Parametrisierung C der abgebildeten Kurve K an.

Strecke von $P = (-2,2)^\intercal$ nach $Q = (3,1)^\intercal$



$C\colon$ $[0,1]$ $\to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto$ $\begin{pmatrix} -2+5t \\ 2-t \end{pmatrix}$

Berechnen Sie: $C'(t) =$ $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie ein Potential U des Vektorfelds

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1,x_2)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} 4x_2^2 \\ 8x_1x_2+1 \end{pmatrix}. \qquad U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1,x_2)^\intercal \mapsto \boxed{4x_1x_2^2 + x_2}$$

Berechnen Sie $\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x =$ 43

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,\mathrm{d}x = \Big[-3x^{-1/3}\Big]$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$$

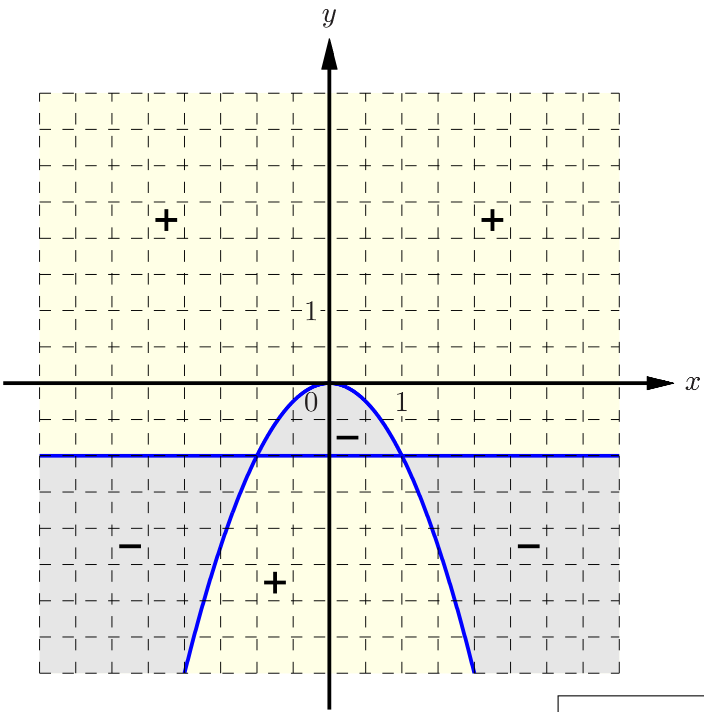
$$\int (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-(x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\Big]$$

$$\int_0^{+\infty} (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2$$

$$\int \frac{3}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \left[\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right]$$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (2 + 2y)(y + x^2)$.

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ von f für $-4 \leqq x \leqq 4$ und $-4 \leqq y \leqq 4$, und markieren Sie die Bereiche, in denen f positive bzw. negative Werte annimmt, mit „+" bzw. „−".



(b) Berechnen Sie: $\operatorname{grad} f(x, y) = \boxed{\begin{pmatrix} 4x + 4xy \\ 2 + 4y + 2x^2 \end{pmatrix}}$

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und geben Sie jeweils deren Typ an.

Kritische Stelle	Typ
$(1, -1)$	Sattelpunkt
$(-1, -1)$	Sattelpunkt
$(0, -\frac{1}{2})$	lokales Minimum