Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/2	/3	/6	/5	/2	/5	/31

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\, b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Berechnen Sie:

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^k$
e^2	2	$1+\mathrm{i}$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}(2+z)^k$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 2^k}{4\mathrm{i}}(z-3\mathrm{i})^k$	$\sum_{k=0}^{\infty} (2\mathrm{i}z+z+1)^k$
z_0	-2	$3\mathrm{i}$	$-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$
ρ	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$

Aufgabe 4 (*2 Punkte*) Gegeben seien differenzierbare Funktionen $f, g, h_1, h_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(4) = 1, \quad f'(4) = 2, \quad g(4) = 4, \quad g'(4) = -1,$$

sowie

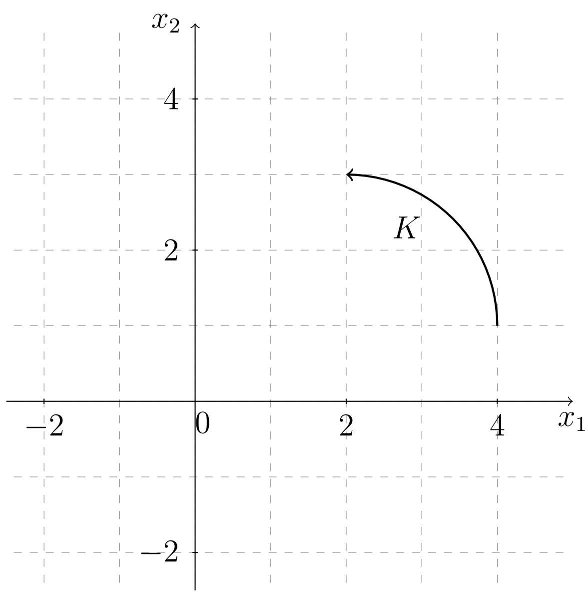
$$h_1(x) = \big(f(g(x))\big)^2 \qquad \text{und} \qquad h_2(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie $h_1'(4)$ und $h_2'(4)$.

$$h_1'(4) = \boxed{-4} \qquad\qquad h_2'(4) = \boxed{\frac{9}{16}}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Geben Sie eine Parametrisierung C der abgebildeten Kurve K an.

Viertelkreis um $M = (2,1)$
von $Q_1 = (4,1)$ bis $Q_2 = (2,3)$



$$C\colon \boxed{[0, \tfrac{\pi}{2}]} \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 2+2\cos(t) \\ 1+2\sin(t) \end{pmatrix}}$$

Berechnen Sie: $C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}}$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*) Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto y(x^3-3x)+y^2.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} 3y(x^2-1) \\ x^3-3x+2y \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{H}f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} 6xy & 3(x^2-1) \\ 3(x^2-1) & 2 \end{pmatrix}}$$

Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und geben Sie jeweils deren Typ an.

Kritische Stelle	Typ
$(0,0)$	Sattelpunkt
$(\sqrt{3},0)$	Sattelpunkt
$(-\sqrt{3},0)$	Sattelpunkt
$(1,1)$	lokales Minimum
$(-1,-1)$	lokales Minimum

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Führen Sie die Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)} = \boxed{\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2(x+1)}}$$

Berechnen Sie

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x+1|\right]}$$

Aufgabe 8 (*2 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\sin(x^2)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{2} \qquad \int x\sin(x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{[\sin(x) - x\cos(x)]}$$

Aufgabe 9 (*5 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto 6x^2 + y^2$$

und

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto 3x^2 + 5y^2 - 1.$$

Geben Sie das Gleichungssystem an, das die Multiplikatormethode nach Lagrange liefert, um die Extrema der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ zu bestimmen.

$$\boxed{\begin{aligned} 12x + 6\lambda x &= 0 \\ 2y + 10\lambda y &= 0 \\ 3x^2 + 5y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}}$$

Berechnen Sie alle kritischen Stellen von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ und deren Typ.

Kritische Stelle	Typ
$\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	globales Minimum
$\left(0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	globales Minimum
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$	globales Maximum
$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$	globales Maximum