Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/2	/8	/6	/6	/4	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Gegeben seien die Isometrien

$$\delta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} v \qquad \text{und} \qquad \alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} v + t\,.$$

Bestimmen Sie den Drehwinkel φ bei δ: $\varphi = \boxed{\frac{\pi}{6}}$

Bestimmen Sie den Translationsanteil t so, dass $\alpha\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$: $t = \boxed{\begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 3 (*8 Punkte*) Gegeben sind bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadriken

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 25 = 0 \right\} \text{ und } \mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 6x_2 + 6 = 0 \right\}.$$

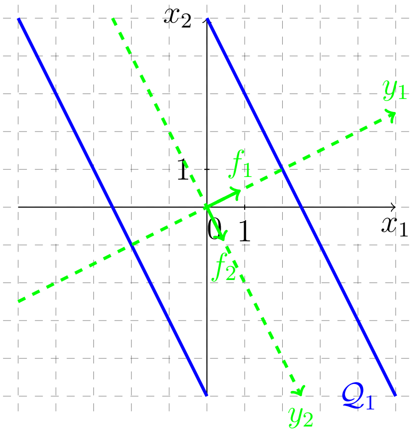
Bestimmen Sie jeweils ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto Fv + t$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

Zu $\mathcal{Q}_1$:

euklidische Normalform:

$$-\tfrac{1}{5}y_1^2 + 1 = 0$$

$F = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

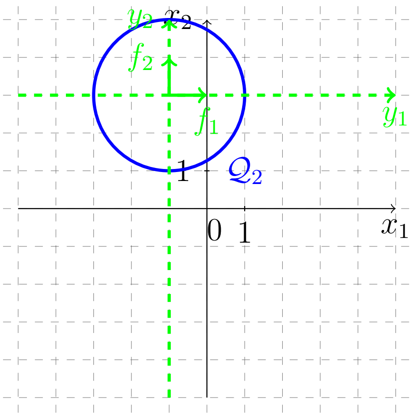


Zu $\mathcal{Q}_2$:

euklidische Normalform:

$$-\tfrac{1}{4}y_1^2 - \tfrac{1}{4}y_2^2 + 1 = 0$$

$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad t = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$



Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Gegeben ist die folgende reelle Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A.

$$\lambda_1 = \boxed{-5} \qquad \lambda_2 = \boxed{0} \qquad \lambda_3 = \boxed{3}$$

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:

$$B : \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*) Es sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem und $\mathbb{F} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ ein weiteres Koordinatensystem für $\mathbb{R}^2$. In Standardkoordinaten sei die affine Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : x \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \; x + \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : y \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}} \; y + \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

$${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}} : {}_{\mathbb{F}}v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}v + \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4+\mathrm{i} & 1-3\mathrm{i} \\ -2-6\mathrm{i} & 5+\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Spur der Matrix A: $\operatorname{Sp} A = \boxed{1+2\mathrm{i}}$

(b) Die Matrix besitzt den Eigenraum $V(\lambda_1) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\lambda_1 = \boxed{1+\mathrm{i}}$

(c) Bestimmen Sie nun den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{\mathrm{i}}$

(d) Geben Sie einen Eigenwert μ von $6A^{-1}$ an.

$$\boxed{\mu = -6\mathrm{i} \text{ oder } \mu = 3-3\mathrm{i}}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben ist die vom reellen Parameter β abhängige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := (3-4\beta)^n.$$

(a) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist $|3-4\beta| \leqq 1$? $\boxed{\left\{\beta \in \mathbb{R} \mid \tfrac{1}{2} \leqq \beta \leqq 1\right\}}$

(b) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton? $\boxed{\left\{\beta \in \mathbb{R} \mid \beta \leqq \tfrac{3}{4}\right\}}$

(c) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt? $\boxed{\left\{\beta \in \mathbb{R} \mid \tfrac{1}{2} \leqq \beta \leqq 1\right\}}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/2	/8	/6	/6	/4	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Gegeben seien die Isometrien

$$\delta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v \qquad \text{und} \qquad \alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v + t\,.$$

Bestimmen Sie den Drehwinkel φ bei δ: $\varphi = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

Bestimmen Sie den Translationsanteil t so, dass $\alpha\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$: $t = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}}$

Aufgabe 3 (*8 Punkte*) Gegeben sind bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadriken

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 25 = 0 \right\} \text{ und } \mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 6x_2 + 6 = 0 \right\}.$$

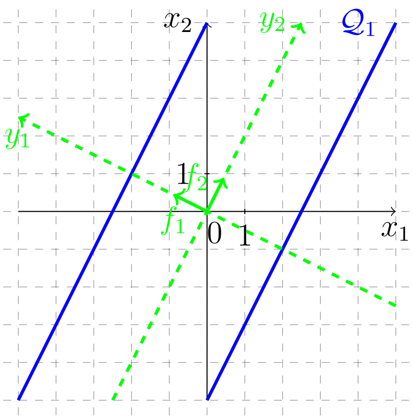
Bestimmen Sie jeweils ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto Fv + t$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

Zu $\mathcal{Q}_1$:

euklidische Normalform:

$$-\tfrac{1}{5}y_1^2 + 1 = 0$$

$F = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

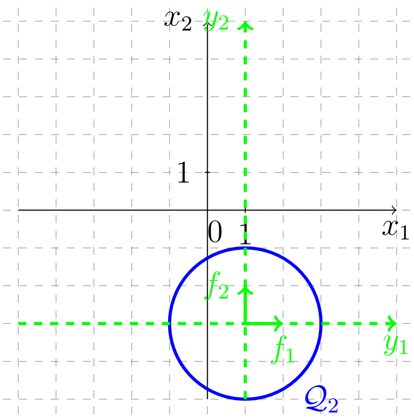


Zu $\mathcal{Q}_2$:

euklidische Normalform:

$$-\tfrac{1}{4}y_1^2 - \tfrac{1}{4}y_2^2 + 1 = 0$$

$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad t = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$



Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Gegeben ist die folgende reelle Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A.

$$\lambda_1 = \boxed{-3} \qquad \lambda_2 = \boxed{-2} \qquad \lambda_3 = \boxed{0}$$

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:

$$B : \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*) Es sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem und $\mathbb{F} := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ ein weiteres Koordinatensystem für $\mathbb{R}^2$. In Standardkoordinaten sei die affine Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : x \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \, x + \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : y \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}} \, y + \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

$${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}} : {}_{\mathbb{F}}v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}v + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2+5\mathrm{i} & 6-2\mathrm{i} \\ 4-3\mathrm{i} & -3-5\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Spur der Matrix A: $\operatorname{Sp} A = \boxed{-1}$

(b) Die Matrix besitzt den Eigenraum $V(\lambda_1) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 2-2\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\lambda_1 = \boxed{-1+\mathrm{i}}$

(c) Bestimmen Sie nun den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{-\mathrm{i}}$

(d) Geben Sie einen Eigenwert μ von $4A^{-1}$ an.

$$\boxed{\mu = 4\mathrm{i} \text{ oder } \mu = -2-2\mathrm{i}}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben ist die vom reellen Parameter β abhängige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := (2+3\beta)^n.$$

(a) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist $|2+3\beta| \leqq 1$?

$$\boxed{\left\{\beta \in \mathbb{R} \mid -1 \leqq \beta \leqq -\tfrac{1}{3}\right\}}$$

(b) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton?

$$\boxed{\left\{\beta \in \mathbb{R} \mid -\tfrac{2}{3} \leqq \beta\right\}}$$

(c) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt?

$$\boxed{\left\{\beta \in \mathbb{R} \mid -1 \leqq \beta \leqq -\tfrac{1}{3}\right\}}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/2	/8	/6	/6	/4	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Gegeben seien die Isometrien

$$\delta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} v \qquad \text{und} \qquad \alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} v + t\,.$$

Bestimmen Sie den Drehwinkel φ bei δ: $\quad \varphi = \boxed{\frac{\pi}{3}}$

Bestimmen Sie den Translationsanteil t so, dass $\alpha\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$: $\quad t = \boxed{\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 3 (*8 Punkte*) Gegeben sind bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadriken

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 - 25 = 0 \right\} \text{ und } \mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 + 2x_2 + 6 = 0 \right\}.$$

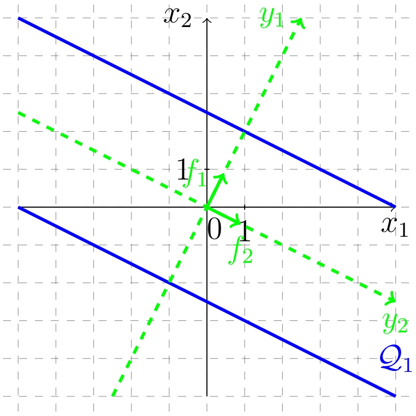
Bestimmen Sie jeweils ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto Fv + t$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

Zu $\mathcal{Q}_1$:

euklidische Normalform:

$$-\tfrac{1}{5}y_1^2 + 1 = 0$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

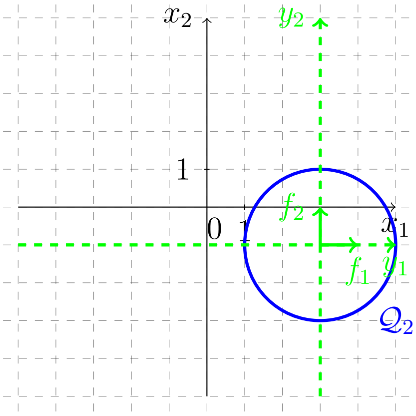


Zu $\mathcal{Q}_2$:

euklidische Normalform:

$$-\tfrac{1}{4}y_1^2 - \tfrac{1}{4}y_2^2 + 1 = 0$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad t = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Gegeben ist die folgende reelle Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A.

$$\lambda_1 = \boxed{0} \qquad \lambda_2 = \boxed{-4} \qquad \lambda_3 = \boxed{2}$$

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:

$$B : \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*) Es sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem und $\mathbb{F} := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ ein weiteres Koordinatensystem für $\mathbb{R}^2$. In Standardkoordinaten sei die affine Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : x \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}\, x + \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : y \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}\, y + \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}} : {}_{\mathbb{F}}v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}v + \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4-\mathrm{i} & 3+4\mathrm{i} \\ 2+6\mathrm{i} & -6+4\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Spur der Matrix A: $\operatorname{Sp} A = \boxed{-2+3\mathrm{i}}$

(b) Die Matrix besitzt den Eigenraum $V(\lambda_1) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} \\ -2+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\lambda_1 = \boxed{-2+\mathrm{i}}$

(c) Bestimmen Sie nun den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{2\mathrm{i}}$

(d) Geben Sie einen Eigenwert μ von $10A^{-1}$ an.

$$\boxed{\mu = -5\mathrm{i} \text{ oder } \mu = -4-2\mathrm{i}}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben ist die vom reellen Parameter β abhängige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := (3+4\beta)^n.$$

(a) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist $|3+4\beta| \leqq 1$? $\boxed{\left\{\beta \in \mathbb{R} \mid -1 \leqq \beta \leqq -\tfrac{1}{2}\right\}}$

(b) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton? $\boxed{\left\{\beta \in \mathbb{R} \mid -\tfrac{3}{4} \leqq \beta\right\}}$

(c) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt? $\boxed{\left\{\beta \in \mathbb{R} \mid -1 \leqq \beta \leqq -\tfrac{1}{2}\right\}}$

Name, Vorname:

Matrikel-Nummer:

Studien-gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/2	/8	/6	/6	/4	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Gegeben seien die Isometrien

$$\delta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v \qquad \text{und} \qquad \alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v + t\,.$$

Bestimmen Sie den Drehwinkel φ bei δ: $\varphi = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

Bestimmen Sie den Translationsanteil t so, dass $\alpha\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$: $t = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3}-2 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 3 (*8 Punkte*) Gegeben sind bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadriken

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 - 25 = 0 \right\} \text{ und } \mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 - 2x_2 + 6 = 0 \right\}.$$

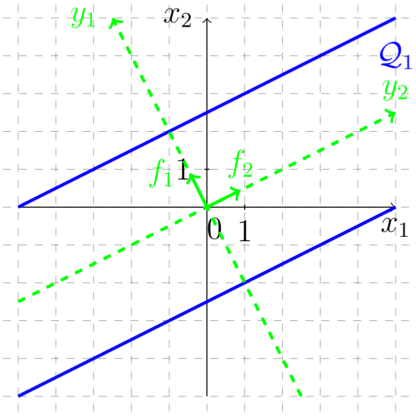
Bestimmen Sie jeweils ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto Fv + t$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

Zu $\mathcal{Q}_1$:

euklidische Normalform:

$$-\tfrac{1}{5}y_1^2 + 1 = 0$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

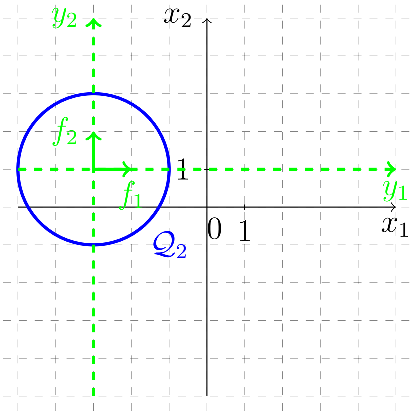


Zu $\mathcal{Q}_2$:

euklidische Normalform:

$$-\tfrac{1}{4}y_1^2 - \tfrac{1}{4}y_2^2 + 1 = 0$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad t = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Gegeben ist die folgende reelle Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A.

$$\lambda_1 = \boxed{4} \qquad \lambda_2 = \boxed{0} \qquad \lambda_3 = \boxed{5}$$

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:

$$B : \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*) Es sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem und $\mathbb{F} := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ein weiteres Koordinatensystem für $\mathbb{R}^2$. In Standardkoordinaten sei die affine Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : x \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \; x + \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : y \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}} \; y + \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}} : {}_{\mathbb{F}}v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}v + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2+2\mathrm{i} & -4-2\mathrm{i} \\ -4-4\mathrm{i} & 4-6\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Spur der Matrix A: $\operatorname{Sp} A = \boxed{2-4\mathrm{i}}$

(b) Die Matrix besitzt den Eigenraum $V(\lambda_1) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -2-\mathrm{i} \\ 2-2\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\lambda_1 = \boxed{2-2\mathrm{i}}$

(c) Bestimmen Sie nun den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{-2\mathrm{i}}$

(d) Geben Sie einen Eigenwert μ von $8A^{-1}$ an.

$$\boxed{\mu = 4\mathrm{i} \text{ oder } \mu = 2+2\mathrm{i}}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben ist die vom reellen Parameter β abhängige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := (2-3\beta)^n.$$

(a) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist $|2-3\beta| \leqq 1$?

$$\boxed{\left\{\beta \in \mathbb{R} \mid \tfrac{1}{3} \leqq \beta \leqq 1\right\}}$$

(b) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton?

$$\boxed{\left\{\beta \in \mathbb{R} \mid \beta \leqq \tfrac{2}{3}\right\}}$$

(c) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt?

$$\boxed{\left\{\beta \in \mathbb{R} \mid \tfrac{1}{3} \leqq \beta \leqq 1\right\}}$$
