Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/4	/2	/4	/3	/4	/5	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie, falls existent, die Summen der folgenden Reihen. Falls eine Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{4^{2k}} = \boxed{\frac{16}{13}} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+3} = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n(n-1)n}(z-2\mathrm{i}+4)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6+(-1)^n)^n}{2^{2n}}(2z-10)^n$
z_0	$-4+2\mathrm{i}$	5
ρ	3	$\frac{2}{7}$

Aufgabe 4 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1+\sinh(2x-2)}{3x-3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{3x-1}{(x-1)^3} = \boxed{+\infty}$$

Benutzen Sie die Symbole „ $+\infty$ “ bzw. „ $-\infty$ “, um bestimmte Divergenz zu kennzeichnen.

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int (x+4)\sin(x)\,\mathrm{d}x$	$[-(x+4)\cos(x)+\sin(x)]$
$\int_0^{\pi} (x+4)\sin(x)\,\mathrm{d}x$	$\pi+8$
$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$	$\frac{1}{3}$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{8}\arctan(4x)\,.$$

Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung von f.

$$f'(x) = \boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+16x^2}}$$

$$f''(x) = \boxed{\frac{-16x}{(1+16x^2)^2}}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom von f der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{1}{4}$.

$$T_2\left(f, x, \frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{32} + \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\right)^2}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (2x+5y^2)\mathrm{e}^x\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{(2+2x+5y^2)e^x} & \boxed{10ye^x} \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{(4+2x+5y^2)e^x} & \boxed{10ye^x} \\ \boxed{10ye^x} & \boxed{10e^x} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen von f mit ihrem Typ an.

kritische Stelle	Typ
$(-1, 0)$	hier liegt ein Minimum vor

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben sind die Abbildungen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 2x^2 + x \\ 3x \end{pmatrix}$$

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3u - v \\ -4u + 2v \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Abbildung $h = g \circ f$ an.

$$h\colon \boxed{\mathbb{R}} \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}^2} \colon x \longmapsto h(x) = \boxed{\begin{pmatrix} 6x^2 \\ -8x^2 + 2x \end{pmatrix}}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $\mathrm{J}f$, $\mathrm{J}g$ und $\mathrm{J}h$.

$$\mathrm{J}f(x) = \boxed{\begin{pmatrix} 4x + 1 \\ 3 \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{J}g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{J}h(x) = \boxed{\begin{pmatrix} 12x \\ -16x + 2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*6 Punkte*) Sei V_α das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$V_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 - 4 \\ \alpha x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Gegeben sind außerdem die Punkte $P = (-2, 0)$ und $Q = (3, 2)$. Sei K die gerade Strecke in $\mathbb{R}^2$ von P nach Q.

Geben Sie eine Parametrisierung C der Kurve K an und berechnen Sie die Ableitung $C'(t)$.

$$C\colon \boxed{[0, 1]} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \colon t \longmapsto \boxed{\begin{pmatrix} 5t - 2 \\ 2t \end{pmatrix}} \qquad C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Bestimmen Sie für $\alpha = 4$ ein Potential Φ für V_4.

$$\Phi(x_1, x_2) = \boxed{x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_1}$$

Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_K V_4(x) \bullet \mathrm{d}x = \boxed{5} \qquad \text{und} \qquad \int_K V_1(x) \bullet \mathrm{d}x = \boxed{2}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/4	/2	/4	/3	/4	/5	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Gruppennr.:** ☐

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie, falls existent, die Summen der folgenden Reihen. Falls eine Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(2\pi)^{2k+2} = \boxed{4\pi^2} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^{2k}} = \boxed{\frac{9}{7}}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4+(-1)^n)^n}{3^{2n}}(3z-6)^n$	$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n(n-2)n}(z+4\mathrm{i}-3)^n$
z_0	2	$3-4\mathrm{i}$
ρ	$\frac{3}{5}$	2

Aufgabe 4 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - \cosh(2x-2)}{4x-4} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{-2x+1}{(x-1)^4} = \boxed{-\infty}$$

Benutzen Sie die Symbole „$+\infty$“ bzw. „$-\infty$“, um bestimmte Divergenz zu kennzeichnen.

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int (x+2)\cos(x)\,\mathrm{d}x$	$[(x+2)\sin(x)+\cos(x)]$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)\cos(x)\,\mathrm{d}x$	$\frac{\pi}{2}+1$
$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$	$\frac{1}{2}$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{10}\arctan(5x)\,.$$

Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung von f.

$$f'(x) = \boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+25x^2}}$$

$$f''(x) = \boxed{\frac{-25x}{(1+25x^2)^2}}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom von f der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{1}{5}$.

$$T_2\left(f, x, \frac{1}{5}\right) = \boxed{\frac{\pi}{40} + \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{5}\right) - \frac{5}{8}\left(x - \frac{1}{5}\right)^2}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (3x - 2y^2)\mathrm{e}^x\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{(3+3x-2y^2)e^x} & \boxed{-4ye^x} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{(6+3x-2y^2)e^x} & \boxed{-4ye^x} \\ \boxed{-4ye^x} & \boxed{-4e^x} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen von f mit ihrem Typ an.

kritische Stelle	Typ
$(-1, 0)$	hier liegt ein Sattelpunkt vor

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben sind die Abbildungen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 5x^2 + 3x \\ 2x \end{pmatrix}$$

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -u + 4v \\ 2u - 3v \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Abbildung $h = g \circ f$ an.

$$h\colon \boxed{\mathbb{R}} \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}^2}\colon x \longmapsto h(x) = \boxed{\begin{pmatrix} -5x^2 + 5x \\ 10x^2 \end{pmatrix}}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $\mathrm{J}f$, $\mathrm{J}g$ und $\mathrm{J}h$.

$$\mathrm{J}f(x) = \boxed{\begin{pmatrix} 10x + 3 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{J}g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{J}h(x) = \boxed{\begin{pmatrix} -10x + 5 \\ 20x \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*6 Punkte*) Sei V_α das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$V_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 + 2x_2 - 6 \\ \alpha x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Gegeben sind außerdem die Punkte $P = (-1, 0)$ und $Q = (2, 2)$. Sei K die gerade Strecke in $\mathbb{R}^2$ von P nach Q.

Geben Sie eine Parametrisierung C der Kurve K an und berechnen Sie die Ableitung $C'(t)$.

$$C\colon \boxed{[0,1]} \longrightarrow \mathbb{R}^2\colon t \longmapsto \boxed{\begin{pmatrix} 3t - 1 \\ 2t \end{pmatrix}} \qquad C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Bestimmen Sie für $\alpha = 2$ ein Potential Φ für V_2.

$$\Phi(x_1, x_2) = \boxed{-x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 6x_1}$$

Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_K V_2(x) \bullet \mathrm{d}x = \boxed{-9} \quad \text{und} \quad \int_K V_1(x) \bullet \mathrm{d}x = \boxed{-10}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/4	/2	/4	/3	/4	/5	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie, falls existent, die Summen der folgenden Reihen. Falls eine Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{3^{2k}} = \boxed{\frac{9}{5}} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+4} = \boxed{\frac{\pi^3}{8}}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6+(-1)^n)^n}{3^{2n}} (3z-9)^n$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^n n(n+1)} (z-3\mathrm{i}+2)^n$
z_0	3	$-2+3\mathrm{i}$
ρ	$\frac{3}{7}$	4

Aufgabe 4 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - \cosh(4x-4)}{3x-3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{4x+2}{(x+1)^4} = \boxed{-\infty}$$

Benutzen Sie die Symbole „$+\infty$“ bzw. „$-\infty$“, um bestimmte Divergenz zu kennzeichnen.

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int (x+3)\sin(x)\,\mathrm{d}x$	$[-(x+3)\cos(x) + \sin(x)]$
$\int_0^{\pi} (x+3)\sin(x)\,\mathrm{d}x$	$\pi + 6$
$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-4\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$	$\frac{1}{4}$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{9}\arctan(3x)\,.$$

Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung von f.

$$f'(x) = \boxed{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+9x^2}}$$

$$f''(x) = \boxed{\frac{-6x}{(1+9x^2)^2}}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom von f der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

$$T_2\left(f, x, \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{\pi}{36} + \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (2x - 4y^2)\mathrm{e}^x\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{(2+2x-4y^2)e^x} & \boxed{-8ye^x} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{(4+2x-4y^2)e^x} & \boxed{-8ye^x} \\ \boxed{-8ye^x} & \boxed{-8e^x} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen von f mit ihrem Typ an.

kritische Stelle	Typ
$(-1, 0)$	hier liegt ein Sattelpunkt vor

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben sind die Abbildungen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 6x \\ 4x^2 - 2x \end{pmatrix}$$

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u + 3v \\ 2u - v \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Abbildung $h = g \circ f$ an.

$$h\colon \boxed{\mathbb{R}} \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}^2}\colon x \longmapsto h(x) = \boxed{\begin{pmatrix} 12x^2 \\ -4x^2 + 14x \end{pmatrix}}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $\mathrm{J}f$, $\mathrm{J}g$ und $\mathrm{J}h$.

$$\mathrm{J}f(x) = \boxed{\begin{pmatrix} 6 \\ 8x - 2 \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{J}g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{J}h(x) = \boxed{\begin{pmatrix} 24x \\ -8x + 14 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*6 Punkte*) Sei V_α das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$V_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_2 - 2 \\ \alpha x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Gegeben sind außerdem die Punkte $P = (-3, 0)$ und $Q = (1, 2)$. Sei K die gerade Strecke in $\mathbb{R}^2$ von P nach Q.

Geben Sie eine Parametrisierung C der Kurve K an und berechnen Sie die Ableitung $C'(t)$.

$$C\colon \boxed{[0,1]} \longrightarrow \mathbb{R}^2\colon t \longmapsto \boxed{\begin{pmatrix} 4t - 3 \\ 2t \end{pmatrix}} \qquad C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Bestimmen Sie für $\alpha = 5$ ein Potential Φ für V_5.

$$\Phi(x_1, x_2) = \boxed{x_1^2 - x_2^2 + 5x_1x_2 - 2x_1}$$

Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_K V_5(x) \bullet \mathrm{d}x = \boxed{-10} \qquad \text{und} \qquad \int_K V_1(x) \bullet \mathrm{d}x = \boxed{-2}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/4	/2	/4	/3	/4	/5	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie, falls existent, die Summen der folgenden Reihen. Falls eine Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (2\pi)^{2k+3} = \boxed{8\pi^3} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{4^{2k}} = \boxed{\frac{16}{11}}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n n(n+2)} (z+3\mathrm{i}-4)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(8+(-1)^n)^n}{2^{2n}} (2z-8)^n$
z_0	$4-3\mathrm{i}$	4
ρ	5	$\frac{2}{9}$

Aufgabe 4 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1 + \sinh(3x-3)}{5x-5} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

$$\lim_{x\to -1+0} \frac{2x+4}{(x+1)^3} = \boxed{+\infty}$$

Benutzen Sie die Symbole „$+\infty$“ bzw. „$-\infty$“, um bestimmte Divergenz zu kennzeichnen.

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int (x+5)\cos(x)\,\mathrm{d}x$	$[(x+5)\sin(x) + \cos(x)]$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+5)\cos(x)\,\mathrm{d}x$	$\frac{\pi}{2} + 4$
$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-5\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$	$\frac{1}{5}$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{8}\arctan(2x)\,.$$

Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung von f.

$$f'(x) = \boxed{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+4x^2}}$$

$$f''(x) = \boxed{\frac{-2x}{(1+4x^2)^2}}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom von f der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{1}{2}$.

$$T_2\left(f, x, \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{32} + \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (3x + 4y^2)\mathrm{e}^x\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{(3+3x+4y^2)e^x} & \boxed{8ye^x} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{(6+3x+4y^2)e^x} & \boxed{8ye^x} \\ \boxed{8ye^x} & \boxed{8e^x} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen von f mit ihrem Typ an.

kritische Stelle	Typ
$(-1, 0)$	hier liegt ein Minimum vor

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben sind die Abbildungen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 4x \\ 3x^2 - 5x \end{pmatrix}$$

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u - 2v \\ 5u + 4v \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Abbildung $h = g \circ f$ an.

$$h\colon \boxed{\mathbb{R}} \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}^2} \colon x \longmapsto h(x) = \boxed{\begin{pmatrix} -6x^2 + 14x \\ 12x^2 \end{pmatrix}}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $\mathrm{J}f$, $\mathrm{J}g$ und $\mathrm{J}h$.

$$\mathrm{J}f(x) = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 6x - 5 \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{J}g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{J}h(x) = \boxed{\begin{pmatrix} -12x + 14 \\ 24x \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*6 Punkte*) Sei V_α das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$V_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 + 3x_2 - 4 \\ \alpha x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Gegeben sind außerdem die Punkte $P = (-2, 0)$ und $Q = (1, 1)$. Sei K die gerade Strecke in $\mathbb{R}^2$ von P nach Q.

Geben Sie eine Parametrisierung C der Kurve K an und berechnen Sie die Ableitung $C'(t)$.

$$C\colon \boxed{[0,1]} \longrightarrow \mathbb{R}^2\colon t \longmapsto \boxed{\begin{pmatrix} 3t - 2 \\ t \end{pmatrix}} \qquad C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Bestimmen Sie für $\alpha = 3$ ein Potential Φ für V_3.

$$\Phi(x_1, x_2) = \boxed{-x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 - 4x_1}$$

Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_K V_3(x) \bullet \mathrm{d}x = \boxed{-5} \qquad \text{und} \qquad \int_K V_1(x) \bullet \mathrm{d}x = \boxed{-4}$$
