Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/7	/3	/5	/3	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die komplexe Zahl

$$z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}.$$

Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung $r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ mit $0 \leqq r$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ für die folgenden komplexen Zahlen an:

$$z = \boxed{2} \cdot \left(\cos \boxed{\frac{3\pi}{4}} + \mathrm{i} \sin \boxed{\frac{3\pi}{4}} \right)$$

$$\frac{z^{11}}{2^6} = \boxed{32} \cdot \left(\cos \boxed{\frac{\pi}{4}} + \mathrm{i} \sin \boxed{\frac{\pi}{4}} \right)$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 12 & 3 & -7 & 9 \\ 7 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinante der Matrizen M, M^2 und $2M$:

$$\det(M) = \boxed{9} \qquad \det\left(M^2\right) = \boxed{81} \qquad \det(2M) = \boxed{144}$$

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 25 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{5} \qquad \lambda_2 = \boxed{8} \qquad \lambda_3 = \boxed{-2}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad V(\lambda_2) = \boxed{\mathbb{R}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad V(\lambda_3) = \boxed{\mathbb{R}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 5 & -5 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sind zwei Koordinatensysteme gegeben: Das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ und das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}X\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}} \cdot {}_{\mathbb{F}}X + \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

sowie die inverse Transformation

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}X\right) = \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -11 & 5 \end{pmatrix}} \cdot {}_{\mathbb{E}}X + \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Die reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind gegeben durch

$$x_n = 12 + (-1)^n \frac{4}{n} \quad \text{und} \quad y_n = \frac{7n^2 + 14n + 3}{(n+1)^2}.$$

Bestimmen Sie eine reelle obere Schranke für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{16}$

Bestimmen Sie eine reelle untere Schranke für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{5}$

Geben Sie eine reelle Zahl an, die sowohl eine untere Schranke für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch eine obere Schranke für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist: $\boxed{7}$

Bestimmen Sie, falls existent, die Summen der folgenden Reihen. Falls eine Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^k = \boxed{\frac{5}{7}} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{2k+1} = \boxed{\frac{4}{15}}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Die Ebene E in $\mathbb{R}^3$ hat die Parameterdarstellung

$$E = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Hessesche Normalform $\langle n|x\rangle = d$ der Ebene E:

$$n = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad d = \boxed{4}.$$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*)

Gegeben ist die Quadrik $Q = \left\{(x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 6x_1^2 - 6x_1x_2 + 6x_2^2 - 18 = 0\right\}$.

Die Matrixbeschreibung der Quadrik ist definiert durch $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0\right\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch, $a \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie A, a und c an:

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}} \qquad a = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad c = \boxed{-18}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A:

$$\lambda_1 = \boxed{3} \qquad \lambda_2 = \boxed{9}$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q und die Gestalt von Q:

euklidische Normalform : $\boxed{-\frac{1}{6}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 1 = 0}$ Gestalt : $\boxed{\text{Ellipse}}$

Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ in Bezug auf das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ an, in welchem Q in dieser euklidischen Normalform vorliegt:

$$\boxed{\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/7	/3	/5	/3	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die komplexe Zahl

$$z = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\mathrm{i}.$$

Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung $r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ mit $0 \leqq r$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ für die folgenden komplexen Zahlen an:

$$z = \boxed{4} \cdot \left(\cos \boxed{\frac{3\pi}{4}} + \mathrm{i}\sin \boxed{\frac{3\pi}{4}}\right)$$

$$\frac{z^7}{4^5} = \boxed{16} \cdot \left(\cos \boxed{\frac{5\pi}{4}} + \mathrm{i}\sin \boxed{\frac{5\pi}{4}}\right)$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 17 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinante der Matrizen M, M^2 und $2M$:

$$\det(M) = \boxed{4} \qquad \det\left(M^2\right) = \boxed{16} \qquad \det(2M) = \boxed{64}$$

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{4} \qquad \lambda_2 = \boxed{5} \qquad \lambda_3 = \boxed{-1}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad V(\lambda_2) = \boxed{\mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad V(\lambda_3) = \boxed{\mathbb{R}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sind zwei Koordinatensysteme gegeben: Das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ und das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \left(_{\mathbb{F}}X \right) = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}} \cdot {_{\mathbb{F}}X} + \boxed{\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

sowie die inverse Transformation

$$_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \left(_{\mathbb{E}}X \right) = \boxed{\tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}} \cdot {_{\mathbb{E}}X} + \boxed{\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Die reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind gegeben durch

$$x_n = 6 + (-1)^n \frac{2}{n} \quad \text{und} \quad y_n = \frac{3n^2 + 6n - 1}{(n+1)^2}.$$

Bestimmen Sie eine reelle obere Schranke für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{10}$

Bestimmen Sie eine reelle untere Schranke für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{0}$

Geben Sie eine reelle Zahl an, die sowohl eine untere Schranke für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch eine obere Schranke für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist: $\boxed{4}$

Bestimmen Sie, falls existent, die Summen der folgenden Reihen. Falls eine Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^k = \boxed{\frac{4}{7}} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} = \boxed{\frac{5}{24}}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Die Ebene E in $\mathbb{R}^3$ hat die Parameterdarstellung

$$E = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Hessesche Normalform $\langle n|x\rangle = d$ der Ebene E:

$$n = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad d = \boxed{5}.$$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*)

Gegeben ist die Quadrik $Q = \left\{(x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 7x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2 - 45 = 0\right\}$.

Die Matrixbeschreibung der Quadrik ist definiert durch $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0\right\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch, $a \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie A, a und c an:

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}} \qquad a = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad c = \boxed{-45}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A:

$$\lambda_1 = \boxed{5} \quad \lambda_2 = \boxed{9}$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q und die Gestalt von Q:

euklidische Normalform : $\boxed{-\frac{1}{9}y_1^2 - \frac{1}{5}y_2^2 + 1 = 0}$ Gestalt : $\boxed{\text{Ellipse}}$

Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ in Bezug auf das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ an, in welchem Q in dieser euklidischen Normalform vorliegt:

$$\boxed{\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/7	/3	/5	/3	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die komplexe Zahl

$$z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i}.$$

Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung $r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ mit $0 \leqq r$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ für die folgenden komplexen Zahlen an:

$$z = \boxed{2} \cdot \left(\cos \boxed{\frac{5\pi}{4}} + \mathrm{i}\sin \boxed{\frac{5\pi}{4}}\right)$$

$$\frac{z^{11}}{2^8} = \boxed{8} \cdot \left(\cos \boxed{\frac{7\pi}{4}} + \mathrm{i}\sin \boxed{\frac{7\pi}{4}}\right)$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -11 & 2 & 9 & -16 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinante der Matrizen M, M^2 und $3M$:

$$\det(M) = \boxed{10} \qquad \det\left(M^2\right) = \boxed{100} \qquad \det(3M) = \boxed{810}$$

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 16 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{6} \qquad \lambda_2 = \boxed{7} \qquad \lambda_3 = \boxed{-1}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad V(\lambda_2) = \boxed{\mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad V(\lambda_3) = \boxed{\mathbb{R}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sind zwei Koordinatensysteme gegeben: Das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ und das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \right) .$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \left({}_{\mathbb{F}}X \right) = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}} \cdot {}_{\mathbb{F}}X + \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

sowie die inverse Transformation

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \left({}_{\mathbb{E}}X \right) = \boxed{\tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}} \cdot {}_{\mathbb{E}}X + \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}} .$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Die reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind gegeben durch

$$x_n = 11 + (-1)^n \frac{4}{n} \quad \text{und} \quad y_n = \frac{6n^2 + 12n + 2}{(n+1)^2} .$$

Bestimmen Sie eine reelle obere Schranke für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{15}$

Bestimmen Sie eine reelle untere Schranke für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{1}$

Geben Sie eine reelle Zahl an, die sowohl eine untere Schranke für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch eine obere Schranke für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist: $\boxed{6}$

Bestimmen Sie, falls existent, die Summen der folgenden Reihen. Falls eine Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{5} \right)^k = \boxed{\frac{5}{8}} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6} \right)^{2k+1} = \boxed{\frac{6}{35}}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Die Ebene E in $\mathbb{R}^3$ hat die Parameterdarstellung

$$E = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Hessesche Normalform $\langle n|x\rangle = d$ der Ebene E:

$$n = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad d = \boxed{2}.$$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*)

Gegeben ist die Quadrik $Q = \left\{(x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 8x_1^2 - 2x_1x_2 + 8x_2^2 - 63 = 0\right\}$.

Die Matrixbeschreibung der Quadrik ist definiert durch $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0\right\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch, $a \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie A, a und c an:

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}} \qquad a = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad c = \boxed{-63}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A:

$$\lambda_1 = \boxed{7} \quad \lambda_2 = \boxed{9}$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q und die Gestalt von Q:

euklidische Normalform : $\boxed{-\frac{1}{9}y_1^2 - \frac{1}{7}y_2^2 + 1 = 0}$ Gestalt : $\boxed{\text{Ellipse}}$

Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ in Bezug auf das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ an, in welchem Q in dieser euklidischen Normalform vorliegt:

$$\boxed{\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/7	/3	/5	/3	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die komplexe Zahl

$$z = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\mathrm{i}.$$

Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung $r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ mit $0 \leqq r$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ für die folgenden komplexen Zahlen an:

$$z = \boxed{4} \cdot \left(\cos \boxed{\frac{5\pi}{4}} + \mathrm{i}\sin \boxed{\frac{5\pi}{4}}\right)$$

$$\frac{z^7}{4^4} = \boxed{64} \cdot \left(\cos \boxed{\frac{3\pi}{4}} + \mathrm{i}\sin \boxed{\frac{3\pi}{4}}\right)$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -13 & 6 \\ 2 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinante der Matrizen M, M^2 und $2M$:

$$\det(M) = \boxed{6} \qquad \det\left(M^2\right) = \boxed{36} \qquad \det(2M) = \boxed{96}$$

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 36 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{6} \qquad \lambda_2 = \boxed{8} \qquad \lambda_3 = \boxed{-4}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad V(\lambda_2) = \boxed{\mathbb{R}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad V(\lambda_3) = \boxed{\mathbb{R}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 6 & -6 \\ -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sind zwei Koordinatensysteme gegeben: Das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ und das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}X\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \cdot {}_{\mathbb{F}}X + \boxed{\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

sowie die inverse Transformation

$$_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}X\right) = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}} \cdot {}_{\mathbb{E}}X + \boxed{\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Die reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind gegeben durch

$$x_n = 8 + (-1)^n \frac{2}{n} \quad \text{und} \quad y_n = \frac{5n^2 + 10n + 1}{(n+1)^2}.$$

Bestimmen Sie eine reelle obere Schranke für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{13}$

Bestimmen Sie eine reelle untere Schranke für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{-1}$

Geben Sie eine reelle Zahl an, die sowohl eine untere Schranke für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch eine obere Schranke für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist: $\boxed{6}$

Bestimmen Sie, falls existent, die Summen der folgenden Reihen. Falls eine Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^k = \boxed{\frac{3}{5}} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^{2k+1} = \boxed{\frac{7}{48}}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Die Ebene E in $\mathbb{R}^3$ hat die Parameterdarstellung

$$E = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Hessesche Normalform $\langle n|x\rangle = d$ der Ebene E:

$$n = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad d = \boxed{3}.$$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*)

Gegeben ist die Quadrik $Q = \left\{(x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18 = 0\right\}$.

Die Matrixbeschreibung der Quadrik ist definiert durch $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0\right\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch, $a \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie A, a und c an:

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}} \qquad a = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad c = \boxed{-18}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A:

$$\lambda_1 = \boxed{1} \quad \lambda_2 = \boxed{9}$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q und die Gestalt von Q:

euklidische Normalform : $\boxed{-\frac{1}{18}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 1 = 0}$ Gestalt : $\boxed{\text{Ellipse}}$

Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ in Bezug auf das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ an, in welchem Q in dieser euklidischen Normalform vorliegt:

$$\boxed{\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$