Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **12. 12. 2015**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 7 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter. Im Vektorraum $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 seien die Vektoren $g_\alpha(X)$, $h_\alpha(X)$ und $k(X)$ wie folgt gegeben:

$$g_\alpha(X) = 2X^2 + X + \alpha, \qquad h_\alpha(X) = \alpha X^2 + X + 2, \qquad k(X) = X^2 + X + 1.$$

(a) Für welche Werte von α sind die Vektoren $g_\alpha(X)$, $h_\alpha(X)$ und $k(X)$ linear abhängig?

$$\alpha \in \boxed{}$$

(b) Stellen Sie den Vektor $q(X) = 6X^2 + 7X + 3$ als Linearkombination von $g_{-1}(X)$, $h_{-1}(X)$ und $k(X)$ dar.

$$q(X) = \boxed{} \cdot g_{-1}(X) + \boxed{} \cdot h_{-1}(X) + \boxed{} \cdot k(X)$$

Aufgabe 8 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{und} \qquad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$$\det(A) = \boxed{}, \quad \det(2A) = \boxed{}, \quad \det(A + \mathrm{E}_2) = \boxed{}.$$

(b) Bestimmen Sie die Inverse von A:

$$A^{-1} = \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\mathcal{L} = \boxed{}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sind die Punkte $P = (1, 0, 2)$, $Q = (-1, 0, 1)$ und $R = (1, -1, 1)$.

Bestimmen Sie $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \boxed{}$.

Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E welche die Punkte P, Q und R enthält.

$$\boxed{}\, x_1 + \boxed{}\, x_2 + \boxed{}\, x_3 = \boxed{}$$

Jetzt sei zusätzlich der Punkt $S = (-3, -3, 0)$ gegeben. Bestimmen Sie den Abstand a von S zu E:

$$a = \boxed{}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

(a) Sei $z = a + \mathrm{i}\, b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie

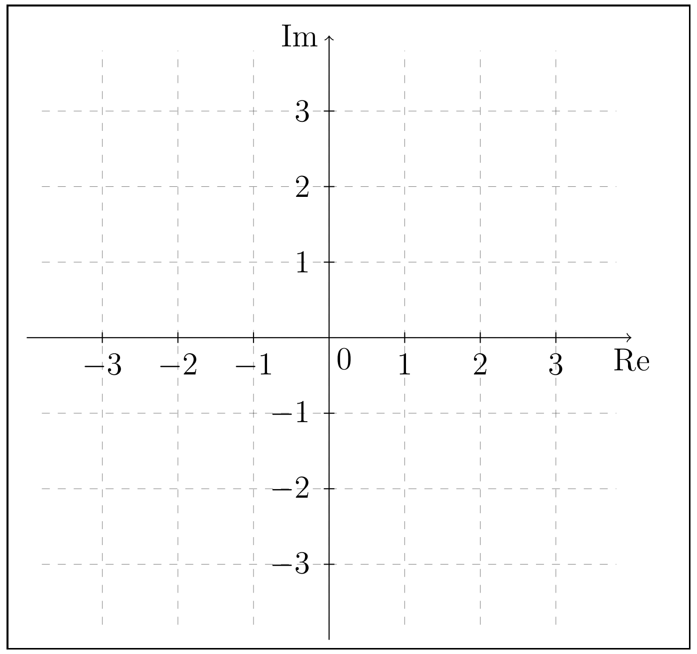
$$\mathrm{i}\,\overline{z}z + \overline{z} - z = \boxed{}$$

(b) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Im}(z) - \frac{1}{2}\operatorname{Re}(z) + 1 = 0 \right\}, \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - 1 + \mathrm{i}| \leqq 1 \right\},$$

$$M_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Im}\left(\mathrm{i}\overline{z}z + \overline{z} - z\right) < 0 \right\}$$

in der komplexen Zahlenebene.



Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ seien $u = (-3, -1, 2, 0)^\intercal$ und $v = (0, 2, -4, 3)^\intercal$ gegeben. Berechnen Sie

$$|u| = \boxed{} \quad \text{und} \quad \langle u \mid v \rangle = \boxed{}.$$

Geben Sie einen Vektor $w \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ so an, dass w auf $\mathrm{L}(u, v)$ senkrecht steht:

$$w = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Die komplexen Zahlen $w_0 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$, $w_1 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ und $w_2 = -2\mathrm{i}$ sind Lösungen der Gleichung $w^3 = z$. Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $B\colon 1, \mathrm{i}$.

(a) Sei die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(w_0) = w_1$ und $f(w_1) = w_2$. Bestimmen Sie die Matrix ${}_Bf_B$.

$${}_Bf_B = \boxed{}$$

(b) Geben Sie w_1 in Polarkoordinaten an. $w_1 = \boxed{}$

(c) Bestimmen Sie z. $z = \boxed{}$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Es seien die Abbildungen

$$f_1\colon \mathbb{C} \to \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geqq -1 \right\} : z \mapsto z\overline{z} - 1$$

$$f_2\colon \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;\middle|\; 0 \leqq \arg(z) \leqq \frac{\pi}{2} \right\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$f_3\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto -\operatorname{Im}(z) + \mathrm{i}\operatorname{Re}(z)$$

$$f_4\colon \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geqq 2 \right\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x-2)^2 - 1$$

gegeben. Prüfen Sie diese auf Injektivität und Surjektivität. Tragen Sie „Ja“ oder „Nein“ ein.

	f_1	f_2	f_3	f_4
injektiv				
surjektiv				

Aufgabe 7 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter. Im Vektorraum $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 seien die Vektoren $g_\alpha(X)$, $h_\alpha(X)$ und $k(X)$ wie folgt gegeben:

$$g_\alpha(X) = \alpha X^2 + 2X + 1, \qquad h_\alpha(X) = X^2 + \alpha, \qquad k(X) = X^2 + 2X + 1.$$

(a) Für welche Werte von α sind die Vektoren $g_\alpha(X)$, $h_\alpha(X)$ und $k(X)$ linear abhängig?

$\alpha \in$ ☐

(b) Stellen Sie den Vektor $q(X) = 4X + \frac{3}{2}$ als Linearkombination von $g_{-1}(X)$, $h_{-1}(X)$ und $k(X)$ dar.

$q(X) =$ ☐ $\cdot\, g_{-1}(X) +$ ☐ $\cdot\, h_{-1}(X) +$ ☐ $\cdot\, k(X)$

Aufgabe 8 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{und} \qquad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$\det(A) =$ ☐, $\det(2A) =$ ☐, $\det(A + \mathrm{E}_2) =$ ☐.

(b) Bestimmen Sie die Inverse von A:

$A^{-1} =$ ☐

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des Gleichungssystems $Ax = b$.

$\mathcal{L} =$ ☐

Scheinklausur — **Höhere Mathematik 1** — **12. 12. 2015**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sind die Punkte $P = (0, 2, 1)$, $Q = (0, 1, -1)$ und $R = (-1, 1, 1)$.

Bestimmen Sie $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \square$.

Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E welche die Punkte P, Q und R enthält.

$\square\, x_1 + \square\, x_2 + \square\, x_3 = \square$

Jetzt sei zusätzlich der Punkt $S = (-1, 2, 0)$ gegeben. Bestimmen Sie den Abstand a von S zu E:

$a = \square$

Aufgabe 3 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

(a) Sei $z = a + \mathrm{i}\, b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie

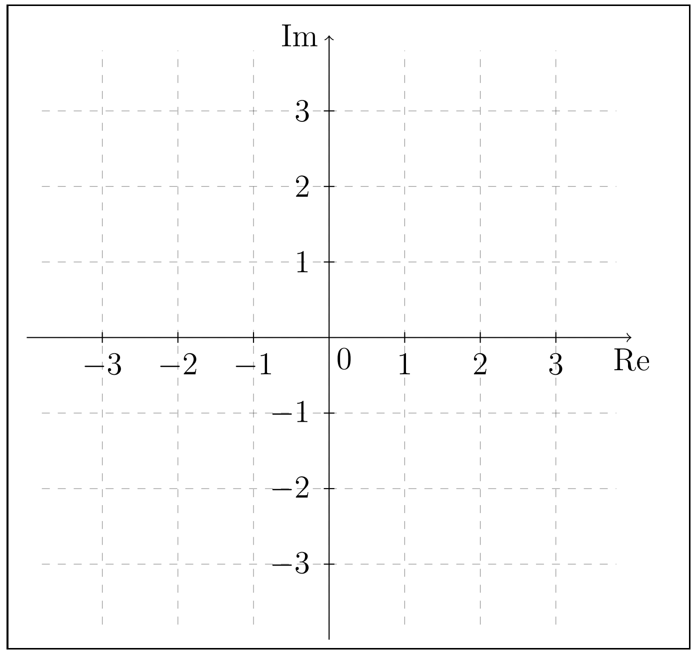
$$2\,\mathrm{i}\,\overline{z}z + 2\overline{z} - 2z = \square$$

(b) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im}(z) - 2\operatorname{Re}(z) + 2 = 0 \right\}, \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z + 1 + \mathrm{i}| \leqq 1 \right\},$$

$$M_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im}\left(2\mathrm{i}\overline{z}z + 2\overline{z} - 2z \right) < 0 \right\}$$

in der komplexen Zahlenebene.



Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ seien $u = (1, -2, 0, 3)^{\mathsf{T}}$ und $v = (2, -4, 3, 0)^{\mathsf{T}}$ gegeben. Berechnen Sie

$|u| = \square$ und $\langle u \,|\, v \rangle = \square$.

Geben Sie einen Vektor $w \in \mathbb{R}^4 \smallsetminus \{0\}$ so an, dass w auf $\mathrm{L}(u, v)$ senkrecht steht:

$w = \square$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Die komplexen Zahlen $w_0 = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$, $w_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ und $w_2 = 2\mathrm{i}$ sind Lösungen der Gleichung $w^3 = z$. Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $B\colon 1, \mathrm{i}$.

(a) Sei die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(w_0) = w_1$ und $f(w_1) = w_2$. Bestimmen Sie die Matrix ${}_Bf_B$.

$${}_Bf_B = \square$$

(b) Geben Sie w_1 in Polarkoordinaten an. $w_1 = \square$

(c) Bestimmen Sie z. $z = \square$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Es seien die Abbildungen

$$f_1\colon \left\{ z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \,\middle|\, \frac{\pi}{2} \leqq \arg(z) \leqq \pi \right\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$f_2\colon \mathbb{C} \to \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geqq -2 \right\} : z \mapsto z\overline{z} - 2$$

$$f_3\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \operatorname{Im}(z) - \mathrm{i}\operatorname{Re}(z)$$

$$f_4\colon \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geqq 4 \right\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x-4)^2 - 1$$

gegeben. Prüfen Sie diese auf Injektivität und Surjektivität. Tragen Sie „Ja“ oder „Nein“ ein.

	f_1	f_2	f_3	f_4
injektiv				
surjektiv				

Aufgabe 7 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter. Im Vektorraum $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 seien die Vektoren $g_\alpha(X)$, $h_\alpha(X)$ und $k(X)$ wie folgt gegeben:

$$g_\alpha(X) = 2X^2 + \alpha X + 1, \qquad h_\alpha(X) = \alpha X^2 + X, \qquad k(X) = 2X^2 + 2X + 1.$$

(a) Für welche Werte von α sind die Vektoren $g_\alpha(X)$, $h_\alpha(X)$ und $k(X)$ linear abhängig?

$$\alpha \in \boxed{}$$

(b) Stellen Sie den Vektor $q(X) = 5X^2 + 5X + 3$ als Linearkombination von $g_{-1}(X)$, $h_{-1}(X)$ und $k(X)$ dar.

$$q(X) = \boxed{} \cdot g_{-1}(X) + \boxed{} \cdot h_{-1}(X) + \boxed{} \cdot k(X)$$

Aufgabe 8 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{und} \qquad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$$\det(A) = \boxed{}, \quad \det(2A) = \boxed{}, \quad \det(A - \mathrm{E}_2) = \boxed{}.$$

(b) Bestimmen Sie die Inverse von A:

$$A^{-1} = \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\mathcal{L} = \boxed{}$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sind die Punkte $P = (-1, 1, 1)$, $Q = (0, 2, 1)$ und $R = (0, 1, -1)$.

Bestimmen Sie $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \boxed{}$.

Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E welche die Punkte P, Q und R enthält.

$$\boxed{}\, x_1 + \boxed{}\, x_2 + \boxed{}\, x_3 = \boxed{}$$

Jetzt sei zusätzlich der Punkt $S = (-1, 2, -3)$ gegeben. Bestimmen Sie den Abstand a von S zu E:

$a = \boxed{}$

Aufgabe 3 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

(a) Sei $z = a + \mathrm{i}\, b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie

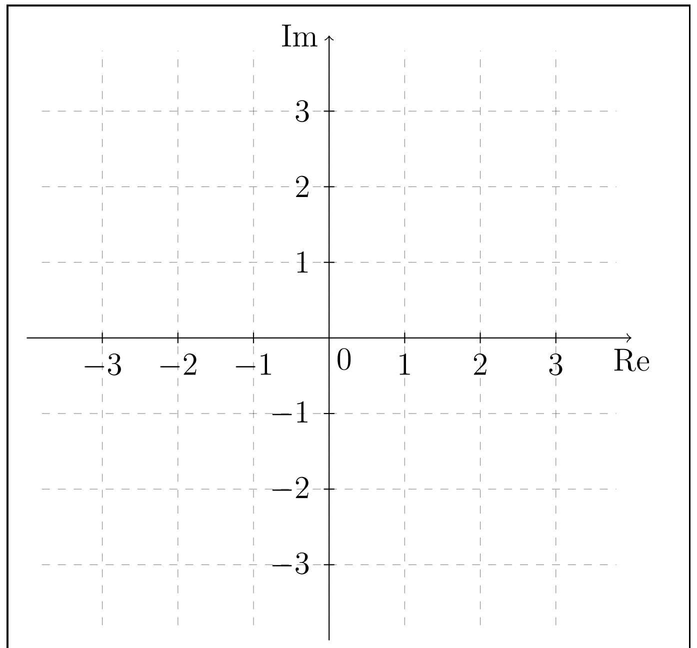
$$\mathrm{i}\,\overline{z}z + 2\overline{z} - 2z = \boxed{}$$

(b) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Im}(z) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}(z) - 1 = 0 \right\}, \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z + 2 + \mathrm{i}| \leqq 1 \right\},$$

$$M_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Im}\left(\mathrm{i}\overline{z}z + 2\overline{z} - 2z \right) < 0 \right\}$$

in der komplexen Zahlenebene.



Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ seien $u = (0, -1, 4, -2)^\intercal$ und $v = (-1, 0, -2, 1)^\intercal$ gegeben. Berechnen Sie

$|v| = \boxed{}$ und $\langle u \,|\, v \rangle = \boxed{}$.

Geben Sie einen Vektor $w \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ so an, dass w auf $\mathrm{L}(u, v)$ senkrecht steht:

$w = \boxed{}$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Die komplexen Zahlen $w_0 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$, $w_1 = -2\mathrm{i}$ und $w_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ sind Lösungen der Gleichung $w^3 = z$. Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $B\colon 1, \mathrm{i}$.

(a) Sei die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(w_0) = w_1$ und $f(w_1) = w_2$. Bestimmen Sie die Matrix ${}_Bf_B$.

$${}_Bf_B = \boxed{}$$

(b) Geben Sie w_2 in Polarkoordinaten an. $w_2 = \boxed{}$

(c) Bestimmen Sie z. $z = \boxed{}$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Es seien die Abbildungen

$$f_1\colon \mathbb{C} \to \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geqq -3 \right\} : z \mapsto z\overline{z} - 3$$

$$f_2\colon \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;\middle|\; \pi \leqq \arg(z) \leqq \frac{3\pi}{2} \right\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$f_3\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto -\mathrm{Im}(z) - \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(z)$$

$$f_4\colon \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geqq 5 \right\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x - 5)^2 - 1$$

gegeben. Prüfen Sie diese auf Injektivität und Surjektivität. Tragen Sie „Ja“ oder „Nein“ ein.

	f_1	f_2	f_3	f_4
injektiv				
surjektiv				

Aufgabe 7 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter. Im Vektorraum $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 seien die Vektoren $g_\alpha(X)$, $h_\alpha(X)$ und $k(X)$ wie folgt gegeben:

$$g_\alpha(X) = 2X^2 + X + \alpha, \qquad h_\alpha(X) = \alpha X^2 + 1, \qquad k(X) = 2X^2 + X + 1.$$

(a) Für welche Werte von α sind die Vektoren $g_\alpha(X)$, $h_\alpha(X)$ und $k(X)$ linear abhängig?

$\alpha \in$ ☐

(b) Stellen Sie den Vektor $q(X) = 4X^2 + \frac{5}{2}X$ als Linearkombination von $g_{-1}(X)$, $h_{-1}(X)$ und $k(X)$ dar.

$$q(X) = \square \cdot g_{-1}(X) + \square \cdot h_{-1}(X) + \square \cdot k(X)$$

Aufgabe 8 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{und} \qquad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$$\det(A) = \square, \quad \det(2A) = \square, \quad \det(A - \mathrm{E}_2) = \square.$$

(b) Bestimmen Sie die Inverse von A:

$$A^{-1} = \square$$

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\mathcal{L} = \square$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **12. 12. 2015**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** 1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) 0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9

Gruppe:

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sind die Punkte $P = (2,1,0)$, $Q = (1,-1,0)$ und $R = (1,1,-1)$.

Bestimmen Sie $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \square$.

Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E welche die Punkte P, Q und R enthält.

$\square\, x_1 + \square\, x_2 + \square\, x_3 = \square$

Jetzt sei zusätzlich der Punkt $S = (2,0,-1)$ gegeben. Bestimmen Sie den Abstand a von S zu E:

$a = \square$

Aufgabe 3 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

(a) Sei $z = a + \mathrm{i}\, b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie

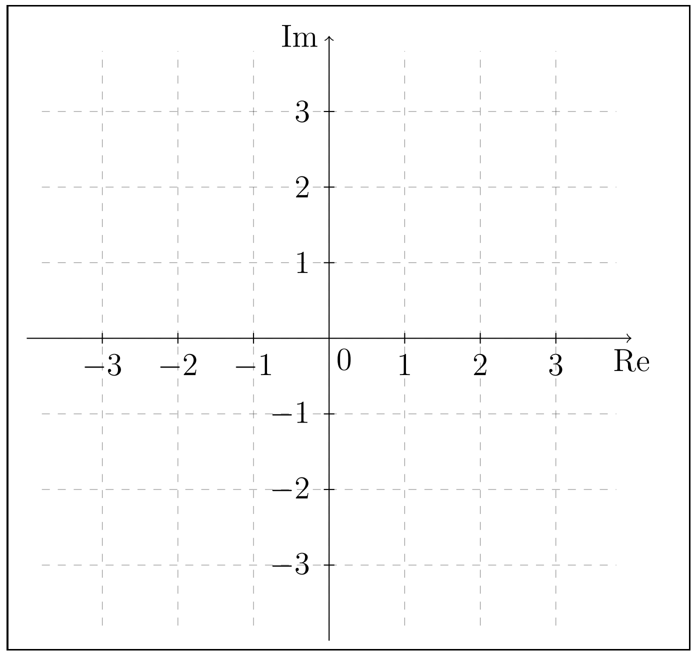
$$\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,\overline{z}z + \overline{z} - z = \square$$

(b) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Im}(z) + 2\operatorname{Re}(z) - 2 = 0 \right\}, \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - 2 + \mathrm{i}| \leqq 1 \right\},$$

$$M_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\overline{z}z + \overline{z} - z \right) < 0 \right\}$$

in der komplexen Zahlenebene.



Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ seien $u = (-4,0,-2,1)^\intercal$ und $v = (0,3,4,-2)^\intercal$ gegeben. Berechnen Sie

$|v| = \square$ und $\langle u \,|\, v \rangle = \square$.

Geben Sie einen Vektor $w \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ so an, dass w auf $\mathrm{L}(u,v)$ senkrecht steht:

$w = \square$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Die komplexen Zahlen $w_0 = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$, $w_1 = 2\mathrm{i}$ und $w_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ sind Lösungen der Gleichung $w^3 = z$. Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $B\colon 1, \mathrm{i}$.

(a) Sei die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(w_0) = w_1$ und $f(w_1) = w_2$. Bestimmen Sie die Matrix ${}_Bf_B$.

$${}_Bf_B = \square$$

(b) Geben Sie w_2 in Polarkoordinaten an. $w_2 = \square$

(c) Bestimmen Sie z. $z = \square$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Es seien die Abbildungen

$$f_1\colon \mathbb{C} \to \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geqq -4 \right\} : z \mapsto z\overline{z} - 4$$

$$f_2\colon \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;\middle|\; \frac{3\pi}{2} \leqq \arg(z) \leqq 2\pi \right\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$f_3\colon \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geqq 3 \right\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x-3)^2 - 1$$

$$f_4\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto -\operatorname{Im}(z) + \mathrm{i}\operatorname{Re}(z)$$

gegeben. Prüfen Sie diese auf Injektivität und Surjektivität. Tragen Sie „Ja" oder „Nein" ein.

	f_1	f_2	f_3	f_4
injektiv				
surjektiv				