Aufgabe 8 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \left(\sqrt{\tfrac{8}{3}}, +\infty\right) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt{3x^2-8}.$$

Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von f.

$$f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2-8}}$$

$$f''(x) = \frac{-24}{(\sqrt{3x^2-8})^3}$$

Stellen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,x,2)$ der Stufe 2 um den Entwicklungspunkt 2 auf.

$$T_2(f,x,2) = 2 + 3(x-2) - \tfrac{3}{2}(x-2)^2$$

Aufgabe 9 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto \mathrm{e}^{-x^2-(y+1)^2}.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x\mathrm{e}^{-x^2-(y+1)^2} & -2(y+1)\mathrm{e}^{-x^2-(y+1)^2} \end{pmatrix}^\intercal$$

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} (4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2-(y+1)^2} & 4x(y+1)\mathrm{e}^{-x^2-(y+1)^2} \\ 4x(y+1)\mathrm{e}^{-x^2-(y+1)^2} & (4(y+1)^2-2)\mathrm{e}^{-x^2-(y+1)^2} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und geben Sie jeweils deren Typ an.

Kritische Stelle	Typ
$(0,-1)$	lokales Maximum

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ■1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{z-3}{1-\mathrm{i}}\right)^j$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z+2-\mathrm{i}\right)^n$	$\sum_{k=4}^{\infty}\left(\sqrt{7}+\mathrm{i}^k\right)^k\left(\frac{z-2}{1+2\mathrm{i}}\right)^k$
z_0	3	$-6+3\mathrm{i}$	2
ρ	$\sqrt{2}$	3	$\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{7}}$

Aufgabe 3 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Bestimmen Sie, falls existent, die Summen der folgenden Reihen. Falls eine Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent" ein.

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n!}$	$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^k}{k!}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{3^n}$
e^{-3}	divergent	$\frac{9}{10}+\frac{3}{10}\mathrm{i}$

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

$\int (x-3)\cos(x)\,\mathrm{d}\,x =$	$\left[(x-3)\sin(x)+\cos(x)\right]$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-3)\cos(x)\,\mathrm{d}\,x =$	$\frac{\pi}{2}-4$
$\int (x^2-2x)\,\mathrm{e}^{x^3-3x^2}\,\mathrm{d}\,x =$	$\left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3-3x^2}\right]$

Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

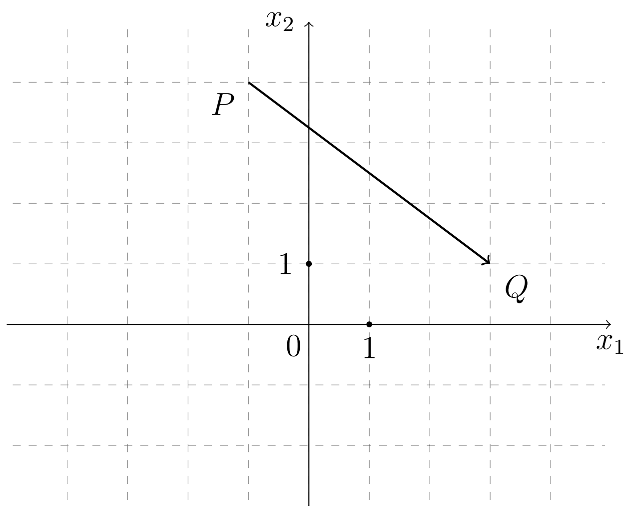
Führen Sie die reelle Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{4-7x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x+2}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Geben Sie eine Parametrisierung C der abgebildeten Kurve K an.

Strecke von $P = (-1,4)^\intercal$ nach $Q = (3,1)^\intercal$



$C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} -1+4t \\ 4-3t \end{pmatrix}$

Berechnen Sie:

$C'(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\left|C'(t)\right| = 5$

Gegeben sei außerdem die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1,x_2)^\intercal \mapsto 3x_1x_2 - x_2.$$

Berechnen Sie $\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s =$ 10

Aufgabe 7 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos(x))^2+(\sin(x))^2}{x^2}$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+3x^2-2}{6x^3+13x-1}$	$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$
2	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$