Aufgabe 6 (6 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei $\beta \in \mathbb{R}$ ein Parameter und seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$u_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad v_\beta = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $u_\beta^\mathsf{T} w$:

$9 - \beta$

(b) Bestimmen Sie die Menge aller $\beta \in \mathbb{R}$, für die $B_\beta \colon u_\beta, v_\beta, w$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist:

$\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

(c) Sei jetzt $\beta = 1$. Stellen Sie den Vektor $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ auf zwei verschiedene Arten als Linearkombination der Vektoren aus B_1 dar:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \boxed{-2} \cdot u_1 + \boxed{3} \cdot v_1 + \boxed{0} \cdot w$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \boxed{-38} \cdot u_1 + \boxed{27} \cdot v_1 + \boxed{12} \cdot w$$

(d) Bestimmen Sie $\dim \mathrm{L}(u_1, v_1, w)$:

2

+1/1/60+

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **17. 12. 2016**

■1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Gegeben seien die Vektoren

$$v_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2}\,\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass folgende Aussagen gelten.

v_α und w sind orthogonal: $\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$|v_\alpha|^2 = 6$: $\boxed{\alpha \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right\}}$

(b) Es sei E_α die Ebene, in der die Punkte mit den Ortsvektoren v_α, w und u liegen. Geben Sie die Hesse-Normalform der Ebene E_α an:

$$\boxed{\left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle \frac{1}{\sqrt{1+2\alpha^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle|\, x \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+2\alpha^2}}\right\}}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

(a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\left(\frac{\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}\right)^3 = \boxed{2\sqrt{2}\,\mathrm{i}} \qquad \overline{\left(\frac{12}{1-\mathrm{i}}\right)} = \boxed{6-6\mathrm{i}}$$

(b) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})^2 \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{(-2-2\mathrm{i}\sqrt{3})^4}{4^3}.$$

Geben Sie die Beträge $|z_1|, |z_2| \in \mathbb{R}_0^+$ und die Winkel $\arg(z_1), \arg(z_2) \in [0, 2\pi)$ an.

$|z_1| = \boxed{2}$ $\qquad \arg(z_1) = \boxed{\frac{5}{4}\pi}$

$|z_2| = \boxed{4}$ $\qquad \arg(z_2) = \boxed{\frac{4}{3}\pi}$

Aufgabe 4 (8 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8

Gegeben seien die folgende Matrix und die folgenden Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$$\det(A) = \boxed{-6} \qquad \det(A^\intercal A) = \boxed{36}$$

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax$. Wir betrachten die Basis $B\colon v_1, v_2, v_3$ sowie die Standardbasis E von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$, ${}_Ef_B$ und den Vektor ${}_Bw$.

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$${}_Ef_B = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 \\ 2 & 6 & -1 \\ -1 & -12 & 10 \end{pmatrix}} \qquad {}_Bw = \boxed{\begin{pmatrix} -24 \\ 11/2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2\sqrt{7} & 2\sqrt{7} & 3\sqrt{7} \\ 0 & -6 & -6 & -9 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{7} \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei $\beta \in \mathbb{R}$ ein Parameter und seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$u_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \ v_\beta = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $u_\beta^\intercal w$:

$$-1 + 4\beta$$

(b) Bestimmen Sie die Menge aller $\beta \in \mathbb{R}$, für die $B_\beta\colon u_\beta, v_\beta, w$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist:

$$\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$$

(c) Sei jetzt $\beta = 1$. Stellen Sie den Vektor $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf zwei verschiedene Arten als Linearkombination der Vektoren aus B_1 dar:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{3} \cdot u_1 + \boxed{-2} \cdot v_1 + \boxed{0} \cdot w$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{27} \cdot u_1 + \boxed{-38} \cdot v_1 + \boxed{12} \cdot w$$

(d) Bestimmen Sie $\dim \mathrm{L}(u_1, v_1, w)$:

$$2$$

☐1 ■2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Gegeben seien die Vektoren

$$v_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{7}\,\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass folgende Aussagen gelten.

v_α und w sind orthogonal: $\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}}$

$|v_\alpha|^2 = 6$: $\boxed{\alpha \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{3}{\sqrt{7}}\right\}}$

(b) Es sei E_α die Ebene, in der die Punkte mit den Ortsvektoren v_α, w und u liegen. Geben Sie die Hesse-Normalform der Ebene E_α an:

$$\boxed{\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle \frac{1}{\sqrt{1+7\alpha^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{7}\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+7\alpha^2}} \right\}}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

(a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\left(\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}\right)^3 = \boxed{3\sqrt{3}\,\mathrm{i}} \qquad \overline{\left(\frac{10}{1-\mathrm{i}}\right)} = \boxed{5-5\mathrm{i}}$$

(b) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{(-3-3\mathrm{i}\sqrt{3})^4}{6^3} \quad \text{und} \quad z_2 = 2\sqrt{2}(-1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})^2.$$

Geben Sie die Beträge $|z_1|, |z_2| \in \mathbb{R}_0^+$ und die Winkel $\arg(z_1), \arg(z_2) \in [0, 2\pi)$ an.

$|z_1| = \boxed{6}$ $\quad \arg(z_1) = \boxed{\frac{4}{3}\pi}$

$|z_2| = \boxed{8}$ $\quad \arg(z_2) = \boxed{\frac{3}{4}\pi}$

Aufgabe 4 (8 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8

Gegeben seien die folgende Matrix und die folgenden Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$\det(A) = \boxed{6} \qquad \det(AA^\intercal) = \boxed{36}$

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto Ax$. Wir betrachten die Basis $B\colon v_1, v_2, v_3$ sowie die Standardbasis E von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$, ${}_Ef_B$ und den Vektor ${}_Bw$.

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1/2 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$${}_Ef_B = \boxed{\begin{pmatrix} -5 & -2 & -2 \\ -5 & -6 & -4 \\ -12 & 4 & -1 \end{pmatrix}} \qquad {}_Bw = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 9/2 \\ -7 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3\sqrt{7} & 2\sqrt{7} & 3\sqrt{7} \\ 0 & -9 & -6 & -9 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{7} \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 □5 ■6

Sei $\beta \in \mathbb{R}$ ein Parameter und seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$u_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad v_\beta = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $u_\beta^\intercal w$:

$$\boxed{16 - \beta}$$

(b) Bestimmen Sie die Menge aller $\beta \in \mathbb{R}$, für die $B_\beta\colon u_\beta, v_\beta, w$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist:

$$\boxed{\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}}$$

(c) Sei jetzt $\beta = 1$. Stellen Sie den Vektor $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ auf zwei verschiedene Arten als Linearkombination der Vektoren aus B_1 dar:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \boxed{-1} \cdot u_1 + \boxed{2} \cdot v_1 + \boxed{0} \cdot w$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \boxed{-25} \cdot u_1 + \boxed{14} \cdot v_1 + \boxed{12} \cdot w$$

(d) Bestimmen Sie $\dim \mathrm{L}(u_1, v_1, w)$:

$$\boxed{2}$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** □1 □2 ■3 □4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) □0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

Gruppe:

□0	□0
□1	□1
□2	□2
□3	□3
□4	□4
□5	□5
□6	□6
□7	□7
□8	□8
□9	□9

Aufgabe 2 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Gegeben seien die Vektoren

$$v_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{5}\,\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass folgende Aussagen gelten.

v_α und w sind orthogonal: $\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}}$

$|v_\alpha|^2 = 6$: $\boxed{\alpha \in \left\{ -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}} \right\}}$

(b) Es sei E_α die Ebene, in der die Punkte mit den Ortsvektoren v_α, w und u liegen. Geben Sie die Hesse-Normalform der Ebene E_α an:

$$\boxed{\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle \frac{1}{\sqrt{1+5\alpha^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{5}\,\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+5\alpha^2}} \right\}}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

(a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\left(\frac{\sqrt{5} - \mathrm{i}\sqrt{5}}{1+\mathrm{i}} \right)^3 = \boxed{5\sqrt{5}\,\mathrm{i}} \qquad \overline{\left(\frac{8}{1-\mathrm{i}} \right)} = \boxed{4 - 4\mathrm{i}}$$

(b) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = \sqrt{2}(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})^2 \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{(-4-4\mathrm{i}\sqrt{3})^4}{8^3}.$$

Geben Sie die Beträge $|z_1|, |z_2| \in \mathbb{R}_0^+$ und die Winkel $\arg(z_1), \arg(z_2) \in [0, 2\pi)$ an.

$|z_1| = \boxed{4}$ $\qquad \arg(z_1) = \boxed{\frac{7}{4}\pi}$

$|z_2| = \boxed{8}$ $\qquad \arg(z_2) = \boxed{\frac{4}{3}\pi}$

Aufgabe 4 (8 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8

Gegeben seien die folgende Matrix und die folgenden Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$\det(A) = \boxed{4}$ $\qquad \det(A^\intercal A) = \boxed{16}$

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax$. Wir betrachten die Basis $B\colon v_1, v_2, v_3$ sowie die Standardbasis E von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$, ${}_Ef_B$ und den Vektor ${}_Bw$.

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$${}_Ef_B = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 21 & -6 \\ -2 & -24 & 8 \\ 2 & 18 & -2 \end{pmatrix}} \qquad {}_Bw = \boxed{\begin{pmatrix} -30 \\ 14/3 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4\sqrt{7} & 2\sqrt{7} & 3\sqrt{7} \\ 0 & -12 & -6 & -9 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{7} \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei $\beta \in \mathbb{R}$ ein Parameter und seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$u_\beta = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \; v_\beta = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \; w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $u_\beta^\intercal w$:

$$\boxed{-1-4\beta}$$

(b) Bestimmen Sie die Menge aller $\beta \in \mathbb{R}$, für die $B_\beta\colon u_\beta, v_\beta, w$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist:

$$\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}}$$

(c) Sei jetzt $\beta = -1$. Stellen Sie den Vektor $x = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf zwei verschiedene Arten als Linearkombination der Vektoren aus B_{-1} dar:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{3} \cdot u_{-1} + \boxed{-2} \cdot v_{-1} + \boxed{0} \cdot w$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{27} \cdot u_{-1} + \boxed{-38} \cdot v_{-1} + \boxed{12} \cdot w$$

(d) Bestimmen Sie $\dim \mathrm{L}(u_{-1}, v_{-1}, w)$:

$$\boxed{2}$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **17. 12. 2016**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ■4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Gegeben seien die Vektoren

$$v_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{7}\,\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass folgende Aussagen gelten.

v_α und w sind orthogonal: $\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}}$

$|v_\alpha|^2 = 6$: $\boxed{\alpha \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{3}{\sqrt{7}}\right\}}$

(b) Es sei E_α die Ebene, in der die Punkte mit den Ortsvektoren v_α, w und u liegen. Geben Sie die Hesse-Normalform der Ebene E_α an:

$$\boxed{\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle \frac{1}{\sqrt{1+7\alpha^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{7}\,\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+7\alpha^2}} \right\}}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

(a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\left(\frac{\sqrt{7} - \mathrm{i}\sqrt{7}}{1+\mathrm{i}}\right)^3 = \boxed{7\sqrt{7}\,\mathrm{i}} \qquad \overline{\left(\frac{6}{1-\mathrm{i}}\right)} = \boxed{3 - 3\mathrm{i}}$$

(b) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{(-5 - 5\mathrm{i}\sqrt{3})^4}{10^3} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})^2.$$

Geben Sie die Beträge $|z_1|, |z_2| \in \mathbb{R}_0^+$ und die Winkel $\arg(z_1), \arg(z_2) \in [0, 2\pi)$ an.

$|z_1| = \boxed{10}$ $\qquad \arg(z_1) = \boxed{\frac{4}{3}\pi}$

$|z_2| = \boxed{2}$ $\qquad \arg(z_2) = \boxed{\frac{1}{4}\pi}$

Aufgabe 4 (8 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8

Gegeben seien die folgende Matrix und die folgenden Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$$\det(A) = \boxed{-4} \qquad \det(AA^\intercal) = \boxed{16}$$

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax$. Wir betrachten die Basis $B\colon v_1, v_2, v_3$ sowie die Standardbasis E von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$, ${}_Ef_B$ und den Vektor ${}_Bw$.

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1/3 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$${}_Ef_B = \boxed{\begin{pmatrix} 18 & -6 & 1 \\ -21 & 15 & 1 \\ 23 & -9 & 1 \end{pmatrix}} \qquad {}_Bw = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 11/3 \\ -9 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 5\sqrt{7} & 2\sqrt{7} & 3\sqrt{7} \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{7} \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$