Aufgabe 8 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei V_α das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$V_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha^2 x_2\, \mathrm{e}^{2x_1} \\ 2\mathrm{e}^{2x_1} + 3x_3 \\ 3x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Divergenz und Rotation von V_α.

$$\operatorname{div} V_\alpha(x_1, x_2, x_3) = \boxed{2\alpha^2 x_2\, \mathrm{e}^{2x_1}}$$

$$\operatorname{rot} V_\alpha(x_1, x_2, x_3) = \left(\boxed{0}, \boxed{0}, \boxed{4\mathrm{e}^{2x_1} - \alpha^2 \mathrm{e}^{2x_1}} \right)^{\mathsf{T}}$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat V_α ein Potential?

$$\boxed{\alpha \in \{-2, +2\}}$$

(c) Bestimmen Sie für $\alpha = 2$ ein Potential U für das Vektorfeld V_2.

$$U(x_1, x_2, x_3) = \boxed{2x_2\, \mathrm{e}^{2x_1} + 3x_2 x_3}$$

(d) Sei die Kurve K gegeben durch die Parametrisierung

$$C\colon [-3, -1] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Länge der Kurve K.

$$L(K) = \boxed{8}$$

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral.

$$\int_K V_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}\, x = \boxed{-24}$$

Scheinklausur — **Höhere Mathematik 2** — **7. 2. 2017**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ■1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\, x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\, b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (3 Punkte) 0 1 2 3

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{6}{x^2-1}\right)$	$\lim\limits_{b\to+\infty}\displaystyle\int_0^b x^2-2x \,\mathrm{d}\,x$	$\lim\limits_{N\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{-2^{k-1}}{k!}$
$\dfrac{3}{2}$	$+\infty$	$-\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$

Aufgabe 3 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{(x+1)(y-2)} + 3x - 4\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\boxed{(y-2)\mathrm{e}^{(x+1)(y-2)}+3} \,,\, \boxed{(x+1)\mathrm{e}^{(x+1)(y-2)}} \right)^{\intercal}$$

(b) Geben Sie das Taylor-Polynom der Stufe eins zum Entwicklungspunkt $(-2,0)$ an.

$$T_1\big(f,(x,y),(-2,0)\big) = \boxed{\mathrm{e}^2-10} + \boxed{(-2\mathrm{e}^2+3)}\,(x+2) + \boxed{(-\mathrm{e}^2)}\,(y-0)$$

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(-2,0,f(-2,0))$.

$$\boxed{(2\mathrm{e}^2-3)}\;x \;+\; \boxed{\mathrm{e}^2}\;y \;+\; \boxed{1}\;z \;+\; \boxed{3\mathrm{e}^2+4} = 0$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) 0 1 2 3

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\displaystyle\sum_{\ell=2}^{\infty}\left(\frac{z+4}{\ell-1}\right)^{\ell}$	$\displaystyle\sum_{m=3}^{\infty}\frac{(-2)^m}{5m+1}(z+2+\mathrm{i})^m$	$\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}5^n\left(\frac{1}{2}z+\mathrm{i}\right)^n$
z_0	-4	$-2-\mathrm{i}$	$-2\mathrm{i}$
ρ	$+\infty$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{2}{5}$

Aufgabe 5 (7 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6 7

Bestimmen Sie die verlangten Grenzwerte, und führen Sie eine Polynomdivision sowie eine Partialbruchzerlegung durch für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{-3,1,3\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{-3x^3+3x^2+15x-15}{(x^2-9)(x-1)}.$$

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{-3}$ $\quad\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \boxed{-\dfrac{3}{2}}$ $\quad\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = \boxed{-\infty}$

(b) Polynomdivision:

$$\frac{-3x^3+3x^2+15x-15}{(x^2-9)(x-1)} = \boxed{-3-\frac{12}{x^2-9}}$$

(c) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{-3x^3+3x^2+15x-15}{(x^2-9)(x-1)} = \boxed{-3-\frac{2}{x-3}+\frac{2}{x+3}}$$

Aufgabe 6 (3 Punkte) 0 1 2 3

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int x\sin(-2x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{x}{2}\cos(-2x)+\frac{1}{4}\sin(-2x)\right]}$$

$$\int \cos(\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[-\frac{1}{2}\sin\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)\right]}$$

Aufgabe 7 (3 Punkte) 0 1 2 3

Gegeben sind die Abbildungen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2-xy \\ -2y \\ y^2 \end{pmatrix}, \quad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2v-3 \\ -u+4v \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $\mathrm{J}f$, $\mathrm{J}g$ und $\mathrm{J}f\left(g\binom{u}{v}\right)$.

$$\mathrm{J}f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2x-y & -x \\ 0 & -2 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{J}g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}$$

$$\mathrm{J}f\left(g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \boxed{\begin{pmatrix} u-6 & -2v+3 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2u+8v \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (6 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6

Sei V_α das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$V_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{3x_3} + 4x_2 \\ 4x_1 \\ \alpha^2 x_1\,\mathrm{e}^{3x_3} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Divergenz und Rotation von V_α.

$$\operatorname{div} V_\alpha(x_1,x_2,x_3) = \boxed{3\alpha^2 x_1\,\mathrm{e}^{3x_3}}$$

$$\operatorname{rot} V_\alpha(x_1,x_2,x_3) = \left(\boxed{0},\ \boxed{9\mathrm{e}^{3x_3} - \alpha^2\mathrm{e}^{3x_3}},\ \boxed{0}\right)^\intercal$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat V_α ein Potential?

$$\boxed{\alpha \in \{-3, +3\}}$$

(c) Bestimmen Sie für $\alpha = 3$ ein Potential U für das Vektorfeld V_3.

$$U(x_1,x_2,x_3) = \boxed{3x_1\,\mathrm{e}^{3x_3} + 4x_1x_2}$$

(d) Sei die Kurve K gegeben durch die Parametrisierung

$$C\colon [-3,-2] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Länge der Kurve K.

$$L(K) = \boxed{5}$$

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral.

$$\int_K V_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{-20}$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 2** **7. 2. 2017**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** 1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) 0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9

Gruppe:

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Aufgabe 2 (3 Punkte) 0 1 2 3

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{-3^{k-1}}{k!}$	$\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right)$	$\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^b x^2 - 3x \,\mathrm{d}\,x$
$-\frac{\mathrm{e}^3}{3}$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$

Aufgabe 3 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{(x-1)(y-2)} + 2y - 3\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\boxed{(y-2)\mathrm{e}^{(x-1)(y-2)}} \,,\, \boxed{(x-1)\mathrm{e}^{(x-1)(y-2)} + 2} \right)^{\intercal}$$

(b) Geben Sie das Taylor-Polynom der Stufe eins zum Entwicklungspunkt $(-1,1)$ an.

$$T_1\big(f,(x,y),(-1,1)\big) = \boxed{\mathrm{e}^2 - 1} + \boxed{(-\mathrm{e}^2)}\,(x+1) + \boxed{(-2\mathrm{e}^2+2)}\,(y-1)$$

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(-1,1,f(-1,1))$.

$$\boxed{\mathrm{e}^2}\,x + \boxed{(2\mathrm{e}^2-2)}\,y + \boxed{1}\,z + \boxed{(-2\mathrm{e}^2+3)} = 0$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) 0 1 2 3

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum\limits_{\ell=2}^{\infty} 4^\ell \left(\frac{1}{3}z - \mathrm{i}\right)^\ell$	$\sum\limits_{m=3}^{\infty} \left(\frac{z-3}{m+1}\right)^m$	$\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{3^n}{6n-3}(z+2-\mathrm{i})^n$
z_0	$3\mathrm{i}$	3	$-2+\mathrm{i}$
ρ	$\frac{3}{4}$	$+\infty$	$\frac{1}{3}$

Aufgabe 5 (7 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6 7

Bestimmen Sie die verlangten Grenzwerte, und führen Sie eine Polynomdivision sowie eine Partialbruchzerlegung durch für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{-3,1,3\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{3x^3 - 3x^2 - 21x + 21}{(x^2-9)(x-1)}\,.$$

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{3}$ $\quad \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \boxed{\frac{9}{4}}$ $\quad \lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = \boxed{+\infty}$

(b) Polynomdivision:

$$\frac{3x^3 - 3x^2 - 21x + 21}{(x^2-9)(x-1)} = \boxed{3 + \frac{6}{x^2-9}}$$

(c) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{3x^3 - 3x^2 - 21x + 21}{(x^2-9)(x-1)} = \boxed{3 + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}}$$

Aufgabe 6 (3 Punkte) 0 1 2 3

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int x\cos(-3x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[-\frac{x}{3}\sin(-3x) + \frac{1}{9}\cos(-3x)\right]}$$

$$\int \sin(\mathrm{e}^{-3x})\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{1}{3}\cos\left(\mathrm{e}^{-3x}\right)\right]}$$

Aufgabe 7 (3 Punkte) 0 1 2 3

Gegeben sind die Abbildungen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - 2xy \\ 3x \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2u+3 \\ 2u+2v \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $\mathrm{J}f$, $\mathrm{J}g$ und $\mathrm{J}f\left(g\binom{u}{v}\right)$.

$$\mathrm{J}f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2x-2y & -2x \\ 3 & 0 \\ 2x & 0 \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{J}g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\mathrm{J}f\left(g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \boxed{\begin{pmatrix} -4v+6 & -4u-6 \\ 3 & 0 \\ 4u+6 & 0 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei V_α das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$V_\alpha \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x_2 \\ 2\mathrm{e}^{2x_3} - 3x_1 \\ \alpha^2 x_2\,\mathrm{e}^{2x_3} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Divergenz und Rotation von V_α.

$$\operatorname{div} V_\alpha(x_1,x_2,x_3) = \boxed{2\alpha^2 x_2\,\mathrm{e}^{2x_3}}$$

$$\operatorname{rot} V_\alpha(x_1,x_2,x_3) = \left(\boxed{\alpha^2\mathrm{e}^{2x_3} - 4\mathrm{e}^{2x_3}}, \boxed{0}, \boxed{0} \right)^\intercal$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat V_α ein Potential?

$$\boxed{\alpha \in \{-2, +2\}}$$

(c) Bestimmen Sie für $\alpha = 2$ ein Potential U für das Vektorfeld V_2.

$$U(x_1,x_2,x_3) = \boxed{2x_2\,\mathrm{e}^{2x_3} - 3x_1x_2}$$

(d) Sei die Kurve K gegeben durch die Parametrisierung

$$C \colon [-4,-2] \to \mathbb{R}^3 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Länge der Kurve K.

$$L(K) = \boxed{12}$$

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral.

$$\int_K V_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{36}$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 2** **7. 2. 2017**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ■3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (3 Punkte) 0 1 2 3

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^b x^2 - 4x \,\mathrm{d}\,x$	$\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{-4^{k-1}}{k!}$	$\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$
$+\infty$	$-\frac{\mathrm{e}^4}{4}$	$\frac{1}{2}$

Aufgabe 3 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto -\mathrm{e}^{(x+2)(y-1)} - 3x - 2\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\boxed{-(y-1)\mathrm{e}^{(x+2)(y-1)} - 3} \,,\, \boxed{-(x+2)\mathrm{e}^{(x+2)(y-1)}} \right)^{\intercal}$$

(b) Geben Sie das Taylor-Polynom der Stufe eins zum Entwicklungspunkt $(0,-1)$ an.

$$T_1\big(f,(x,y),(0,-1)\big) = \boxed{-\mathrm{e}^{-4} - 2} + \boxed{(2\mathrm{e}^{-4} - 3)}\,(x-0) + \boxed{(-2\mathrm{e}^{-4})}\,(y+1)$$

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(0,-1,f(0,-1))$.

$$\boxed{(-2\mathrm{e}^{-4}+3)}\; x + \boxed{2\mathrm{e}^{-4}}\; y + \boxed{1}\; z + \boxed{3\mathrm{e}^{-4}+2} = 0$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) 0 1 2 3

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum\limits_{\ell=2}^{\infty} \frac{4^\ell}{4\ell-4}(z-2+5\mathrm{i})^\ell$	$\sum\limits_{m=3}^{\infty} 3^m \left(-\frac{1}{5}z + \mathrm{i}\right)^m$	$\sum\limits_{n=4}^{\infty} \left(\frac{z-2}{n-2}\right)^n$
z_0	$2-5\mathrm{i}$	$5\mathrm{i}$	2
ρ	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$

Aufgabe 5 (7 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6 7

Bestimmen Sie die verlangten Grenzwerte, und führen Sie eine Polynomdivision sowie eine Partialbruchzerlegung durch für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{-3,1,3\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{2x^3 - 2x^2 - 6x + 6}{(x^2-9)(x-1)}.$$

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \boxed{\frac{1}{2}}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = \boxed{-\infty}$

(b) Polynomdivision:

$$\frac{2x^3 - 2x^2 - 6x + 6}{(x^2-9)(x-1)} = \boxed{2 + \frac{12}{x^2-9}}$$

(c) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x^3 - 2x^2 - 6x + 6}{(x^2-9)(x-1)} = \boxed{2 + \frac{2}{x-3} - \frac{2}{x+3}}$$

Aufgabe 6 (3 Punkte) 0 1 2 3

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int x \sin(-3x)\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{x}{3}\cos(-3x) + \frac{1}{9}\sin(-3x)\right]$$

$$\int \cos(\mathrm{e}^{-4x})\mathrm{e}^{-4x}\,\mathrm{d}\,x = \left[-\frac{1}{4}\sin\left(\mathrm{e}^{-4x}\right)\right]$$

Aufgabe 7 (3 Punkte) 0 1 2 3

Gegeben sind die Abbildungen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + 3xy \\ y^2 \\ 2y \end{pmatrix}, \quad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3u - 2v \\ 2u + 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $\mathrm{J}f$, $\mathrm{J}g$ und $\mathrm{J}f\left(g\binom{u}{v}\right)$.

$$\mathrm{J}f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y & 3x \\ 0 & 2y \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{J}g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{J}f\left(g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4v+6 & -9u-6v \\ 0 & 4u+4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei V_α das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$V_\alpha \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{3x_2} - 2x_3 \\ \alpha^2 x_1 \,\mathrm{e}^{3x_2} \\ -2x_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Divergenz und Rotation von V_α.

$$\operatorname{div} V_\alpha(x_1, x_2, x_3) = \boxed{3\alpha^2 x_1 \,\mathrm{e}^{3x_2}}$$

$$\operatorname{rot} V_\alpha(x_1, x_2, x_3) = \left(\boxed{0}, \boxed{0}, \boxed{\alpha^2 \mathrm{e}^{3x_2} - 9\mathrm{e}^{3x_2}} \right)^\top$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat V_α ein Potential?

$$\boxed{\alpha \in \{-3, +3\}}$$

(c) Bestimmen Sie für $\alpha = 3$ ein Potential U für das Vektorfeld V_3.

$$U(x_1, x_2, x_3) = \boxed{3x_1 \,\mathrm{e}^{3x_2} - 2x_1 x_3}$$

(d) Sei die Kurve K gegeben durch die Parametrisierung

$$C \colon [-4, -1] \to \mathbb{R}^3 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Länge der Kurve K.

$$L(K) = \boxed{15}$$

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral.

$$\int_K V_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{30}$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ■4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (3 Punkte) □0 □1 □2 ■3

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3}{x-2}-\frac{12}{x^2-4}\right)$	$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b x^2-5x\,\mathrm{d}\,x$	$\lim\limits_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{-5^{k-1}}{k!}$
$\frac{3}{4}$	$+\infty$	$-\frac{\mathrm{e}^5}{5}$

Aufgabe 3 (5 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 ■5

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto -\mathrm{e}^{(x-2)(y+2)} - 3y + 4\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\boxed{-(y+2)\mathrm{e}^{(x-2)(y+2)}}\,,\ \boxed{-(x-2)\mathrm{e}^{(x-2)(y+2)}-3} \right)^{\mathsf{T}}$$

(b) Geben Sie das Taylor-Polynom der Stufe eins zum Entwicklungspunkt $(1,-1)$ an.

$$T_1\big(f,(x,y),(1,-1)\big) = \boxed{-\mathrm{e}^{-1}+7} + \boxed{(-\mathrm{e}^{-1})}\,(x-1) + \boxed{(\mathrm{e}^{-1}-3)}\,(y+1)$$

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(1,-1,f(1,-1))$.

$$\boxed{\mathrm{e}^{-1}}\,x + \boxed{(-\mathrm{e}^{-1}+3)}\,y + \boxed{1}\,z + \boxed{(-\mathrm{e}^{-1}-4)} = 0$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) □0 □1 □2 ■3

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{\ell=2}^{\infty}\left(\frac{z+2}{\ell+4}\right)^{\ell}$	$\sum_{m=3}^{\infty}\frac{(-6)^m}{3m-7}(z-3+7\mathrm{i})^m$	$\sum_{n=4}^{\infty}5^n\left(-\frac{1}{7}z+\mathrm{i}\right)^n$
z_0	-2	$3-7\mathrm{i}$	$7\mathrm{i}$
ρ	$+\infty$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{5}$

Aufgabe 5 (7 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 ■7

Bestimmen Sie die verlangten Grenzwerte, und führen Sie eine Polynomdivision sowie eine Partialbruchzerlegung durch für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{-3,1,3\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{-2x^3+2x^2+12x-12}{(x^2-9)(x-1)}.$$

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{-2}$ $\quad\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \boxed{-\frac{5}{4}}$ $\quad\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = \boxed{+\infty}$

(b) Polynomdivision:

$$\frac{-2x^3+2x^2+12x-12}{(x^2-9)(x-1)} = \boxed{-2-\frac{6}{x^2-9}}$$

(c) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{-2x^3+2x^2+12x-12}{(x^2-9)(x-1)} = \boxed{-2-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}}$$

Aufgabe 6 (3 Punkte) □0 □1 □2 ■3

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int x\cos(-2x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[-\frac{x}{2}\sin(-2x)+\frac{1}{4}\cos(-2x)\right]}$$

$$\int \sin(\mathrm{e}^{-5x})\mathrm{e}^{-5x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{1}{5}\cos\left(\mathrm{e}^{-5x}\right)\right]}$$

Aufgabe 7 (3 Punkte) □0 □1 □2 ■3

Gegeben sind die Abbildungen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2-3xy \\ x^2 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2u-3v \\ -2v-1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $\mathrm{J}f$, $\mathrm{J}g$ und $\mathrm{J}f\left(g\binom{u}{v}\right)$.

$$\mathrm{J}f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2x-3y & -3x \\ 2x & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{J}g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

$$\mathrm{J}f\left(g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 4u+3 & -6u+9v \\ 4u-6v & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$$