



**Aufgabe 6** (6 Punkte)

0  1  2  3  4  5  6

Gegeben sei  $\mathbb{R}^3$  mit dem Standardkoordinatensystem  $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2, e_3)$ . Weiter seien

$$\mathbb{F} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathbb{G} = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die folgenden Koordinatentransformationen.

$\mathbb{E}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : v \mapsto$   $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\mathbb{G}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : v \mapsto$   $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathbb{G}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : v \mapsto$   $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 7** (3 Punkte)

0  1  2  3

Sei  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  eine reelle  $3 \times 3$ -Matrix, die als Eigenwerte  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 = -3 + \sqrt{7}i$  besitzt.

Bestimmen Sie den verbliebenen Eigenwert  $\lambda_3$ , die Determinante von  $A$  und die Spur von  $A$ .

$$\lambda_3 = \boxed{-3 - \sqrt{7}i}, \quad \det A = \boxed{0}, \quad \text{Sp } A = \boxed{-6}.$$

**Schein-Nachklausur**

**Höhere Mathematik 1**

10.02.2017

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

1  2  3  4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0  1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Matrikelnummer:**

**Gruppe:**

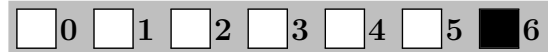
<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**



**Aufgabe 2** (6 Punkte)



Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom  $\chi_A(\lambda)$  von  $A$  an.

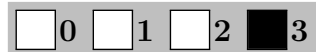
$\chi_A(\lambda) =$

(b) Geben Sie alle Eigenwerte von  $A$  an.

(c) Bestimmen Sie Eigenvektoren  $v_1, v_2, v_3$  von  $A$  so, dass diese eine Orthonormalbasis für  $\mathbb{R}^3$  bilden.

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 3** (3 Punkte)



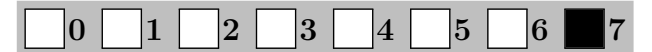
Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein Parameter und  $A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ .

(a) Für welche Werte des Parameters  $\alpha$  ist  $\text{Rg } A_\alpha = 1$ ?

(b) Für welche Werte des Parameters  $\alpha$  ist  $A_\alpha$  invertierbar?

(c) Für welche Werte des Parameters  $\alpha$  ist  $A_\alpha$  nicht diagonalisierbar?

**Aufgabe 4** (7 Punkte)



Wir betrachten die Quadrik  $Q := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -2x_1^2 + 8x_1x_2 - 8x_2^2 + 8\sqrt{5}x_1 + 2\sqrt{5}x_2 - 2 = 0\}$ .

(a) Geben Sie eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , einen Vektor  $a \in \mathbb{R}^2$  und ein  $c \in \mathbb{R}$  so an, dass gilt  $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^T A x + 2a^T x + c = 0\}$ .

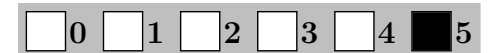
$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 4\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}, c = -2$ .

(b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix  $D$  und eine orthogonale Matrix  $F$  so, dass  $D = F^T A F$ . Geben Sie  $D$  und  $F$  an.

$D = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

(c) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von  $Q$ .

**Aufgabe 5** (5 Punkte)



(a) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = ((-1)^n + 5) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)$ .

(b) Sei  $\beta \in \mathbb{R}$  ein Parameter. Für welche Werte von  $\beta$  ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = \left(\frac{5}{7} + \beta\right)^n$  konvergent?

(c) Berechnen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e}$ .