Aufgabe 8 (2 Punkte) 0 1 2

Die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\intercal A\,x + c = 0\}$ mit $c \geqq 0$ besitze die euklidische Normalform

$$2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{8}y_3^2 + 1 = 0.$$

(a) Ist die Matrix A positiv definit, negativ definit, oder indefinit?

indefinit

(b) Geben Sie die Gestalt der Quadrik Q an. einschaliges Hyperboloid

---

Aufgabe 9 (7 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6 7

Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2)$. Für ein zweites affines Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sei

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon\quad v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad {}_{\mathbb{F}}S = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an und bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}S$:

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}}; \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right), \qquad {}_{\mathbb{E}}S = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}}.$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon\quad v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} v + \boxed{\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}}.$$

(c) In Standardkoordinaten von $\mathbb{E}$ sei die affine Abbildung

$$\gamma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon\quad v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Beschreibung ${}_{\mathbb{F}}\gamma_{\mathbb{F}}$ von γ bezüglich der Koordinaten von $\mathbb{F}$:

$${}_{\mathbb{F}}\gamma_{\mathbb{F}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon\quad {}_{\mathbb{F}}v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} {}_{\mathbb{F}}v + \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}}.$$

Scheinklausur 2 **Höhere Mathematik 1** **03. 02. 2018**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** 1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Aufgabe 1 (1 Punkt) 0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer: / **Gruppe:**

0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9

Aufgabe 2 (2 Punkte) 0 1 2

Für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ seien $A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & \alpha & -4 \end{pmatrix}$ und $B_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & \alpha \end{pmatrix}$.

Für welche Werte von α

hat A_α eine Rechtsinverse? Für $\alpha \neq -6$.

ist B_α invertierbar? Für $\alpha \neq 2$.

Aufgabe 3 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

(a) Bestimmen Sie die Determinante $\det\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & -1 & 4\end{pmatrix} = \boxed{20}$.

(b) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(A) = -\frac{10}{3}$, $\det(B) = \frac{5}{3}$. Berechnen Sie

$$\det(B^{-1}A) = \boxed{-2}, \qquad \det(A^{\mathsf{T}}B^{-1}A) = \boxed{\frac{20}{3}}.$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix}6-2\mathrm{i} & 2+\mathrm{i}\\ -4-2\mathrm{i} & -5\mathrm{i}\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

Die Matrix A besitzt den Eigenraum $V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$. Bestimmen Sie $\lambda_1 = \boxed{4-3\mathrm{i}}$.

Bestimmen Sie nun den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{2-4\mathrm{i}}$.

Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei $A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(\lambda) = -(3+\lambda)(3-\lambda)^2$.

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

$$\boxed{\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -3}$$

Geben Sie die Eigenräume von A zu jedem Eigenwert an.

$$\boxed{V(3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right), \quad V(-3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)}$$

Berechnen Sie eine orthogonale Transformationsmatrix F so, dass $F^{-1}A\,F$ eine Diagonalmatrix ist.

$$F = \boxed{\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Wir betrachten die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^{\mathsf{T}}A\,x + 2\,a^{\mathsf{T}}x + c = 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix}4 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}, \quad c = 16.$$

Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix F so, dass $D = F^{\mathsf{T}}A\,F$ ist.

$$D = \boxed{\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}} \qquad F = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}}$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q, sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform hat.

Euklidische Normalform:	Koordinatensystem:
$2\sqrt{2}\,w_1^2 + 2\,w_2 = 0$	$\left(\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$

Aufgabe 7 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

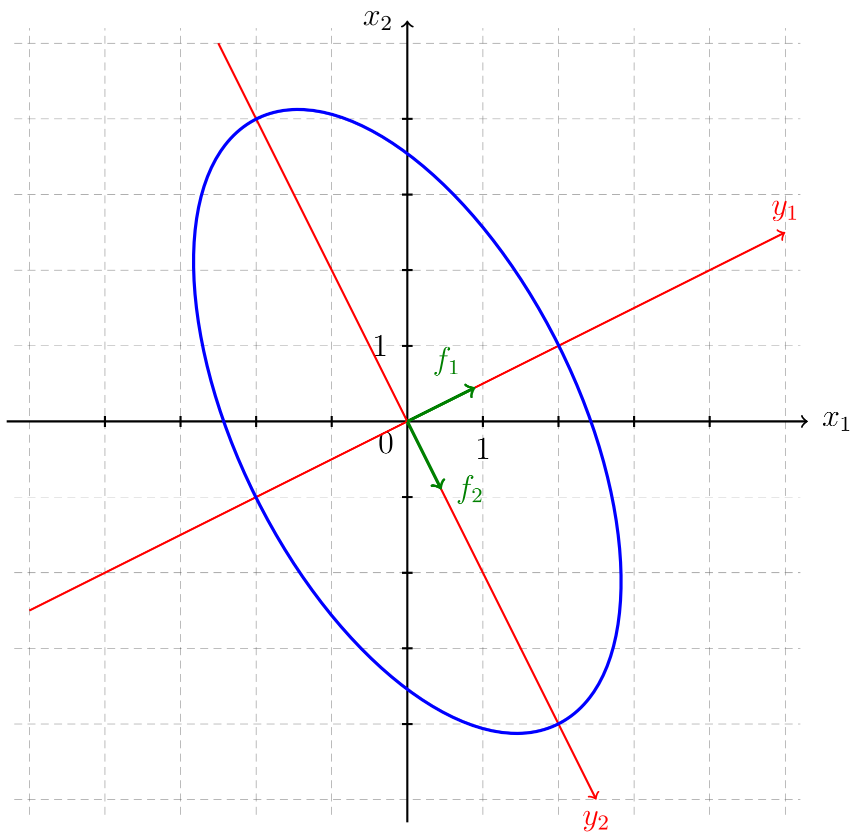
Bezüglich des Koordinatensystems

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$$

sei die Quadrik Q beschrieben durch die Gleichung

$$-\frac{1}{5}y_1^2 - \frac{1}{20}y_2^2 + 1 = 0.$$

Skizzieren Sie die Quadrik Q, sowie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ in das Standardkoordinatensystem.



Aufgabe 8 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\mathsf{T} A\, x + c = 0\}$ mit $c \geqq 0$ besitze die euklidische Normalform

$$-\frac{1}{20}y_1^2 - \frac{1}{5}y_2^2 - \frac{1}{3}y_3^2 + 1 = 0.$$

(a) Ist die Matrix A positiv definit, negativ definit, oder indefinit?

negativ definit

(b) Geben Sie die Gestalt der Quadrik Q an.

Ellipsoid

Aufgabe 9 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2)$. Für ein zweites affines Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sei

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \quad v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad {}_{\mathbb{F}}S = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an und bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}S$:

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad {}_{\mathbb{E}}S = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \quad v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

(c) In Standardkoordinaten von $\mathbb{E}$ sei die affine Abbildung

$$\gamma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \quad v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Beschreibung ${}_{\mathbb{F}}\gamma_{\mathbb{F}}$ von γ bezüglich der Koordinaten von $\mathbb{F}$:

$${}_{\mathbb{F}}\gamma_{\mathbb{F}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \quad {}_{\mathbb{F}}v \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}v + \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ■2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ seien $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 2 \\ 0 & -5 & \alpha \end{pmatrix}$ und $B_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -3 \\ 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Für welche Werte von α

ist A_α invertierbar?	Für $\alpha \neq 1$.
hat B_α eine Linksinverse?	Für $\alpha \neq -9$.

Aufgabe 3 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

(a) Bestimmen Sie die Determinante $\det\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{-30}$.

(b) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(A) = \frac{8}{3}$, $\det(B) = -\frac{2}{3}$. Berechnen Sie

$$\det(B^{-1}A) = \boxed{-4}, \qquad \det(A^{\intercal}B^{-1}A) = \boxed{-\frac{32}{3}}.$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -5-3\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \\ -6-2\mathrm{i} & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

Die Matrix A besitzt den Eigenraum $V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Bestimmen Sie $\lambda_1 = \boxed{-2-2\mathrm{i}}$.

Bestimmen Sie nun den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{1-\mathrm{i}}$.

Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-7)(\lambda+2)^2$.

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

$$\boxed{\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 7}$$

Geben Sie die Eigenräume von A zu jedem Eigenwert an.

$$\boxed{V(-2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V(7) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Berechnen Sie eine orthogonale Transformationsmatrix F so, dass $F^{-1}AF$ eine Diagonalmatrix ist.

$$F = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Wir betrachten die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^{\intercal}A\,x + 2\,a^{\intercal}x + c = 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = -10.$$

Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix F so, dass $D = F^{\intercal}A\,F$ ist.

$$D = \boxed{\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad F = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q, sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform hat.

Euklidische Normalform:	Koordinatensystem:
$\sqrt{5}\,w_1^2 + 2\,w_2 = 0$	$\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Aufgabe 7 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

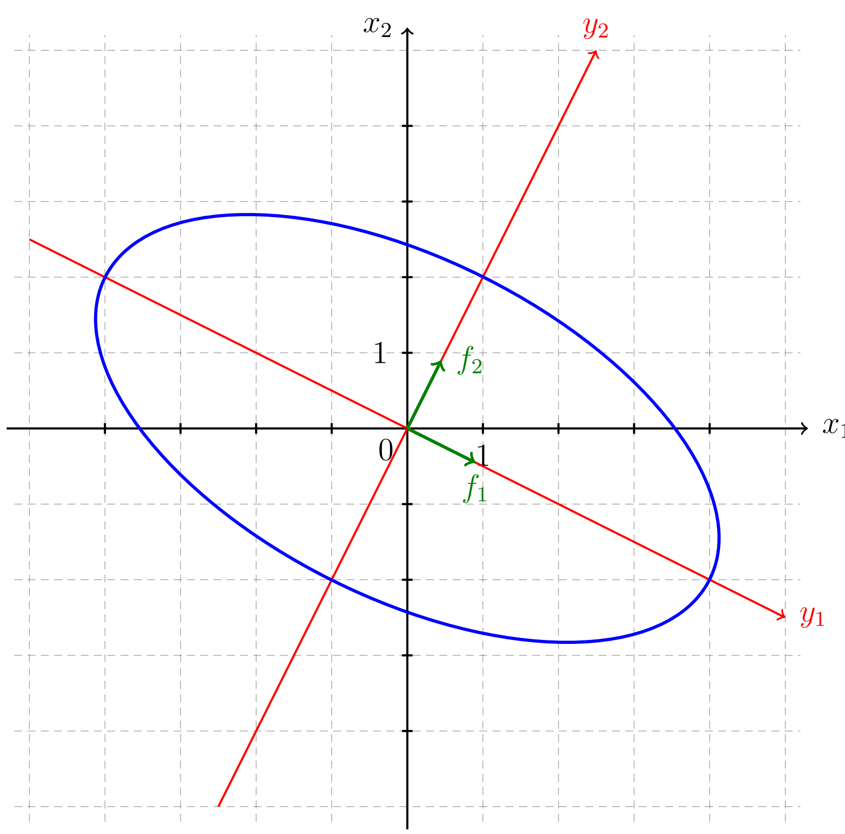
Bezüglich des Koordinatensystems

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

sei die Quadrik Q beschrieben durch die Gleichung

$$-\frac{1}{20}y_1^2 - \frac{1}{5}y_2^2 + 1 = 0.$$

Skizzieren Sie die Quadrik Q, sowie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ in das Standardkoordinatensystem.



Aufgabe 8 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\intercal A\, x + c = 0\}$ mit $c \geqq 0$ besitze die euklidische Normalform

$$\frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{18}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2 + 1 = 0.$$

(a) Ist die Matrix A positiv definit, negativ definit, oder indefinit?

indefinit

(b) Geben Sie die Gestalt der Quadrik Q an. zweischaliges Hyperboloid

---

Aufgabe 9 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2)$. Für ein zweites affines Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sei

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon\quad v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad {}_{\mathbb{F}}S = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an und bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}S$:

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}} ; \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} , \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}} \right), \qquad {}_{\mathbb{E}}S = \boxed{\begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix}}.$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon\quad v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\, v + \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}}.$$

(c) In Standardkoordinaten von $\mathbb{E}$ sei die affine Abbildung

$$\gamma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon\quad v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Beschreibung ${}_{\mathbb{F}}\gamma_{\mathbb{F}}$ von γ bezüglich der Koordinaten von $\mathbb{F}$:

$${}_{\mathbb{F}}\gamma_{\mathbb{F}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon\quad {}_{\mathbb{F}}v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}\, {}_{\mathbb{F}}v + \boxed{\begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix}}.$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ■3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:							Gruppe:	
☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Aufgabe 2 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ seien $A_\alpha = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -8 & 6 & \alpha \end{pmatrix}$ und $B_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 6 \end{pmatrix}$.

Für welche Werte von α

hat A_α eine Rechtsinverse?	Für $\alpha \neq -2$.
ist B_α invertierbar?	Für $\alpha \neq 6$.

Aufgabe 3 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

(a) Bestimmen Sie die Determinante $\det\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{21}$.

(b) Seien $A,\, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(A) = -\frac{9}{7}$, $\det(B) = \frac{3}{7}$. Berechnen Sie

$$\det(B^{-1}A) = \boxed{-3}, \qquad \det(A^\intercal B^{-1} A) = \boxed{\frac{27}{7}}.$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 8\mathrm{i} & -1+2\mathrm{i} \\ 2-4\mathrm{i} & 3+2\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

Die Matrix A besitzt den Eigenraum $V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Bestimmen Sie $\lambda_1 = \boxed{1+6\mathrm{i}}$.

Bestimmen Sie nun den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{2+4\mathrm{i}}$.

Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-5)(\lambda+1)^2$.

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

$$\boxed{\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 5}$$

Geben Sie die Eigenräume von A zu jedem Eigenwert an.

$$\boxed{V(-1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V(5) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Berechnen Sie eine orthogonale Transformationsmatrix F so, dass $F^{-1}AF$ eine Diagonalmatrix ist.

$$F = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Wir betrachten die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A\, x + 2\, a^\intercal x + c = 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = -36.$$

Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix F so, dass $D = F^\intercal A\, F$ ist.

$$D = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad F = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q, sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform hat.

Euklidische Normalform:

$$\boxed{\sqrt{2}\, w_1^2 + 2\, w_2 = 0}$$

Koordinatensystem:

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

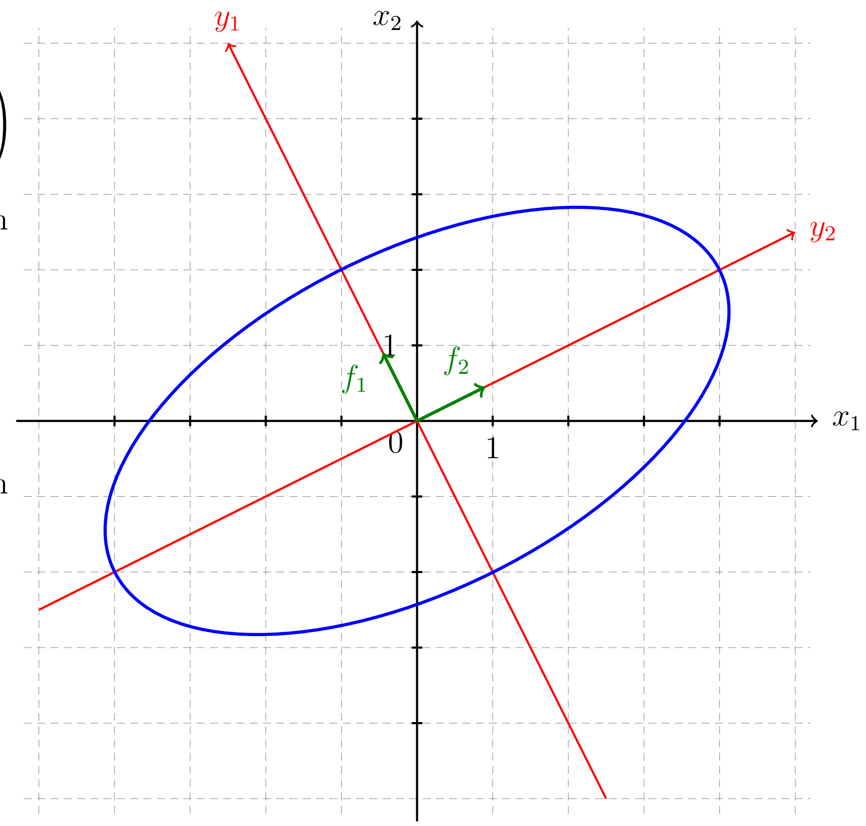
Bezüglich des Koordinatensystems

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

sei die Quadrik Q beschrieben durch die Gleichung

$$-\frac{1}{5}y_1^2 - \frac{1}{20}y_2^2 + 1 = 0.$$

Skizzieren Sie die Quadrik Q, sowie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ in das Standardkoordinatensystem.



Aufgabe 8 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\intercal A\, x + c = 0\}$ mit $c \geqq 0$ besitze die euklidische Normalform

$$\frac{1}{20}y_1^2 + \frac{1}{5}y_2^2 + \frac{1}{4}y_3^2 = 0.$$

(a) Ist die Matrix A positiv definit, negativ definit, oder indefinit?

positiv definit

(b) Geben Sie die Gestalt der Quadrik Q an.

ein Punkt

Aufgabe 9 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2)$. Für ein zweites affines Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sei

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon\quad v \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix} v + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad {}_{\mathbb{F}}S = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an und bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}S$:

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}} ; \boxed{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}} , \boxed{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}} \right), \qquad {}_{\mathbb{E}}S = \boxed{\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}} .$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon\quad v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}}\, v + \boxed{\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}} .$$

(c) In Standardkoordinaten von $\mathbb{E}$ sei die affine Abbildung

$$\gamma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon\quad v \mapsto \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} v + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Beschreibung ${}_{\mathbb{F}}\gamma_{\mathbb{F}}$ von γ bezüglich der Koordinaten von $\mathbb{F}$:

$${}_{\mathbb{F}}\gamma_{\mathbb{F}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon\quad {}_{\mathbb{F}}v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix}4 & 1\\ -10 & -2\end{pmatrix}}\, {}_{\mathbb{F}}v + \boxed{\begin{pmatrix}5\\-16\end{pmatrix}} .$$

+4/1/54+

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ■4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:							Gruppe:	
☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Aufgabe 2 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ seien $A_\alpha = \begin{pmatrix}\alpha & 3 & 0\\ -3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \alpha-9\end{pmatrix}$ und $B_\alpha = \begin{pmatrix}-10 & 2\\ 5 & \alpha\\ 15 & -3\end{pmatrix}$.

Für welche Werte von α

ist A_α invertierbar?	Für $\alpha \neq 9$.
hat B_α eine Linksinverse?	Für $\alpha \neq -1$.

Aufgabe 3 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

(a) Bestimmen Sie die Determinante $\det\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{-28}$.

(b) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(A) = \frac{10}{7}$, $\det(B) = -\frac{2}{7}$. Berechnen Sie

$$\det(B^{-1}A) = \boxed{-5}, \qquad \det(A^\intercal B^{-1} A) = \boxed{-\frac{50}{7}}.$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1+3i & -8+6i \\ -4+3i & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

Die Matrix A besitzt den Eigenraum $V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Bestimmen Sie $\lambda_1 = \boxed{9-3i}$.

Bestimmen Sie nun den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{-3+6i}$.

Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(\lambda) = -(\lambda+5)(\lambda-4)^2$.

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

$$\boxed{\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -5}$$

Geben Sie die Eigenräume von A zu jedem Eigenwert an.

$$V(4) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V(-5) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Berechnen Sie eine orthogonale Transformationsmatrix F so, dass $F^{-1} A F$ eine Diagonalmatrix ist.

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Wir betrachten die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A\, x + 2\, a^\intercal x + c = 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = 20.$$

Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix F so, dass $D = F^\intercal A\, F$ ist.

$$D = \boxed{\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad F = \boxed{\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q, sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform hat.

Euklidische Normalform:	Koordinatensystem:
$\sqrt{10}\, w_1^2 + 2\, w_2 = 0$	$\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Aufgabe 7 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Bezüglich des Koordinatensystems

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

sei die Quadrik Q beschrieben durch die Gleichung

$$-\frac{1}{20} y_1^2 - \frac{1}{5} y_2^2 + 1 = 0.$$

Skizzieren Sie die Quadrik Q, sowie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ in das Standardkoordinatensystem.