





**Aufgabe 2** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Gegeben seien die Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2} \quad \text{und} \quad g(x) = e^x(4 \sin(x) - \cos(x))$$

definiert sind. Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

$f'(x) =$    $g'(x) =$

Sei jetzt  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die durch  $H(x) := f(g(x))$  definierte Funktion. Berechnen Sie den Wert, den die Ableitung von  $H$  an der Stelle  $x = 0$  annimmt:

$H'(0) =$

Geben Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion  $H$  an der Stelle  $x = 0$  an:

**Aufgabe 3** (7 Punkte)

0  1  2  3  4  5  6  7

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$\int_1^2 2x \, dx =$

$\int \frac{-3}{(x+3)^2 + 1} \, dx =$

$\int e^{4x} \cosh(e^{2x}) \, dx =$

$\int \left( \frac{5x}{5x^2 + 1} - \frac{1}{x} \right) \, dx =$

$\int_1^{+\infty} \left( \frac{5x}{5x^2 + 1} - \frac{1}{x} \right) \, dx =$

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Abbildung, die definiert ist durch

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 4x + 3y.$$

(a) Berechnen Sie  $\text{grad } f(x, y)$ :

(b) Finden Sie alle kritischen Stellen von  $f$ .

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von  $f$ .

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle den Typ des entsprechenden kritischen Punktes.

**Aufgabe 5** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den

Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  und den Konvergenzradius  $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ .

	$\sum_{k=1}^{\infty} 5^{k+1}(z+7)^k$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k^2+1}(\sqrt{2}z+3)^k$	$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(z-3)^{2k}}{k!}$
$z_0$			
$\rho$			



**Aufgabe 6** (5 Punkte)

0  1  2  3  4  5

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto 2x^2 - 4xy + 2y^2 \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x^2 + 4y^2 - 4$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen (in  $x$ ,  $y$  und  $\lambda$ ) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  beschreiben.

(b) Finden Sie alle  $(x, y)$  so, dass  $(x, y, \lambda)$  eine Lösung dieses Gleichungssystems ist (für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

**Aufgabe 7** (3 Punkte)

0  1  2  3

Berechnen Sie:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x}{7x^2(3x - 2)}$	$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{4 \ln(k) \ln(k-1)} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4 \cos\left(\frac{x\pi}{9}\right) - 2}{x^2 - 9}$

**Aufgabe 8** (3 Punkte)

0  1  2  3

Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein Parameter. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die stetige Funktion mit

$$f(x) = (\alpha + 5)|x^2 - 9|(x - 1).$$

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte für  $x_0 = 3$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \boxed{\phantom{000}} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \boxed{\phantom{000}}$$

Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $f$  differenzierbar in  $\mathbb{R}$ ?

1  2  3  4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	$x^a$	$e^x$	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	$e^x$	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	$b^x$	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$x$	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0  1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

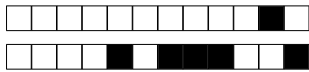
**Matrikelnummer:**

**Gruppe:**

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**



**Aufgabe 2** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Gegeben seien die Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3} \quad \text{und} \quad g(x) = e^x(5 \sin(x) - \cos(x))$$

definiert sind. Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

$f'(x) =$    $g'(x) =$

Sei jetzt  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die durch  $H(x) := f(g(x))$  definierte Funktion. Berechnen Sie den Wert, den die Ableitung von  $H$  an der Stelle  $x = 0$  annimmt:

$H'(0) =$

Geben Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion  $H$  an der Stelle  $x = 0$  an:

**Aufgabe 3** (7 Punkte)

0  1  2  3  4  5  6  7

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$\int_1^2 3x \, dx =$

$\int \frac{-2}{(x+2)^2 + 1} \, dx =$

$\int e^{6x} \cosh(e^{3x}) \, dx =$

$\int \left( \frac{4x}{4x^2 + 1} - \frac{1}{x} \right) \, dx =$

$\int_1^{+\infty} \left( \frac{4x}{4x^2 + 1} - \frac{1}{x} \right) \, dx =$

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Abbildung, die definiert ist durch

$$f(x, y) = -2x^2 + xy - y^2 + x + 2y.$$

(a) Berechnen Sie  $\text{grad } f(x, y)$ :

(b) Finden Sie alle kritischen Stellen von  $f$ .

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von  $f$ .

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle den Typ des entsprechenden kritischen Punktes.

**Aufgabe 5** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den

Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  und den Konvergenzradius  $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ .

	$\sum_{k=1}^{\infty} 7^{k+1}(z+6)^k$	$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(z-2)^{2k}}{k!}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7^k}{k^2+1} (\sqrt{2}z+7)^k$
$z_0$			
$\rho$			



**Aufgabe 6** (5 Punkte)

0  1  2  3  4  5

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto -x^2 + 2xy - y^2 \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x^2 + 3y^2 - 2$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen (in  $x$ ,  $y$  und  $\lambda$ ) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  beschreiben.

(b) Finden Sie alle  $(x, y)$  so, dass  $(x, y, \lambda)$  eine Lösung dieses Gleichungssystems ist (für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

**Aufgabe 7** (3 Punkte)

0  1  2  3

Berechnen Sie:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 8x^2 - 3}{2x(3x^2 + 5)}$	$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{3}{\ln(k) \ln(k-1)} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 \sin\left(\frac{x\pi}{12}\right) - 2}{x^2 - 4}$

**Aufgabe 8** (3 Punkte)

0  1  2  3

Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein Parameter. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die stetige Funktion mit

$$f(x) = (\alpha - 2)(x - 1)|x^2 - 16|.$$

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte für  $x_0 = 4$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \boxed{\phantom{000}} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \boxed{\phantom{000}}$$

Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $f$  differenzierbar in  $\mathbb{R}$ ?

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

1  2  3  4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	$x^a$	$e^x$	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	$e^x$	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	$b^x$	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$x$	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0  1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Matrikelnummer:**

**Gruppe:**

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**



**Aufgabe 2** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Gegeben seien die Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 4} \quad \text{und} \quad g(x) = e^x(6 \sin(x) - \cos(x))$$

definiert sind. Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

$f'(x) =$    $g'(x) =$

Sei jetzt  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die durch  $H(x) := f(g(x))$  definierte Funktion. Berechnen Sie den Wert, den die Ableitung von  $H$  an der Stelle  $x = 0$  annimmt:

$H'(0) =$

Geben Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion  $H$  an der Stelle  $x = 0$  an:

**Aufgabe 3** (7 Punkte)

0  1  2  3  4  5  6  7

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$\int_1^2 4x \, dx =$

$\int \frac{3}{(x-3)^2 + 1} \, dx =$

$\int e^{4x} \sinh(e^{2x}) \, dx =$

$\int \left( \frac{3x}{3x^2 + 1} - \frac{1}{x} \right) \, dx =$

$\int_1^{+\infty} \left( \frac{3x}{3x^2 + 1} - \frac{1}{x} \right) \, dx =$

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Abbildung, die definiert ist durch

$$f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - 2x + 2y.$$

(a) Berechnen Sie  $\text{grad } f(x, y)$ :

(b) Finden Sie alle kritischen Stellen von  $f$ .

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von  $f$ .

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle den Typ des entsprechenden kritischen Punktes.

**Aufgabe 5** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den

Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  und den Konvergenzradius  $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ .

	$\sum_{k=1}^{\infty} 9^{k+1}(z+5)^k$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k^2+1}(\sqrt{2}z+5)^k$	$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(z-5)^{2k}}{k!}$
$z_0$			
$\rho$			



**Aufgabe 6** (5 Punkte)

0  1  2  3  4  5

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto -2x^2 + 4xy - 2y^2 \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto 4x^2 + y^2 - 4$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen (in  $x$ ,  $y$  und  $\lambda$ ) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  beschreiben.

(b) Finden Sie alle  $(x, y)$  so, dass  $(x, y, \lambda)$  eine Lösung dieses Gleichungssystems ist (für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

**Aufgabe 7** (3 Punkte)

0  1  2  3

Berechnen Sie:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 6x + 1}{3x^2(4x - 7)}$	$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{5 \ln(k) \ln(k-1)} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin(\frac{x\pi}{6}) - 1}{x^2 + x - 2}$

**Aufgabe 8** (3 Punkte)

0  1  2  3

Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein Parameter. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die stetige Funktion mit

$$f(x) = (x - 3)|x^2 - 25|(\alpha + 3).$$

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte für  $x_0 = 5$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \boxed{\phantom{000}} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \boxed{\phantom{000}}$$

Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $f$  differenzierbar in  $\mathbb{R}$ ?

1  2  3  4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	$x^a$	$e^x$	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	$e^x$	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	$b^x$	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$x$	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0  1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

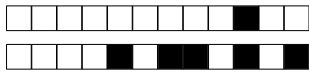
**Matrikelnummer:**

**Gruppe:**

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**



**Aufgabe 2** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Gegeben seien die Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 5} \quad \text{und} \quad g(x) = e^x(7 \sin(x) - \cos(x))$$

definiert sind. Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

$f'(x) =$    $g'(x) =$

Sei jetzt  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die durch  $H(x) := f(g(x))$  definierte Funktion. Berechnen Sie den Wert, den die Ableitung von  $H$  an der Stelle  $x = 0$  annimmt:

$H'(0) =$

Geben Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion  $H$  an der Stelle  $x = 0$  an:

**Aufgabe 3** (7 Punkte)

0  1  2  3  4  5  6  7

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$\int_1^2 5x \, dx =$

$\int \frac{2}{(x-2)^2 + 1} \, dx =$

$\int e^{6x} \sinh(e^{3x}) \, dx =$

$\int \left( \frac{2x}{2x^2 + 1} - \frac{1}{x} \right) \, dx =$

$\int_1^{+\infty} \left( \frac{2x}{2x^2 + 1} - \frac{1}{x} \right) \, dx =$

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Abbildung, die definiert ist durch

$$f(x, y) = -x^2 + xy - y^2 - 3x + 2y.$$

(a) Berechnen Sie  $\text{grad } f(x, y)$ :

(b) Finden Sie alle kritischen Stellen von  $f$ .

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von  $f$ .

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle den Typ des entsprechenden kritischen Punktes.

**Aufgabe 5** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den

Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  und den Konvergenzradius  $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ .

	$\sum_{k=1}^{\infty} 11^{k+1}(z+4)^k$	$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(z-4)^{2k}}{k!}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{9^k}{k^2+1} (\sqrt{2}z+9)^k$
$z_0$			
$\rho$			