Aufgabe 7 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{C}$ mit den Basen

$$E\colon \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B\colon \begin{pmatrix}2\\\mathrm{i}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C\colon \begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{}, \quad {}_C\mathrm{id}_E = \boxed{}, \quad {}_C\mathrm{id}_B = \boxed{}.$$

(b) Die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \colon v \mapsto Av$ soll die folgenden Bedingungen erfüllen

$$\alpha\left(\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \alpha\left(\begin{pmatrix}-2\\-\mathrm{i}\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-2\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_C\alpha_C = \boxed{}, \quad {}_E\alpha_C = \boxed{}, \quad {}_E\alpha_E = \boxed{}.$$

Aufgabe 8 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben seien das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right)$$

und die Gerade g durch die Gleichung $x_2 = 2x_1 + 1$ (in Standardkoordinaten).

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}v\right) = \boxed{}, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}v\right) = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie die Abbildungen ${}_{\mathbb{F}}\beta_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\beta_{\mathbb{E}}$, wobei β die Spiegelung an der Geraden g bezeichnet.

$${}_{\mathbb{F}}\beta_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}v\right) = \boxed{}, \quad {}_{\mathbb{E}}\beta_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}v\right) = \boxed{}$$

Scheinklausur — **Höhere Mathematik 1** — **17. 7. 2018**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

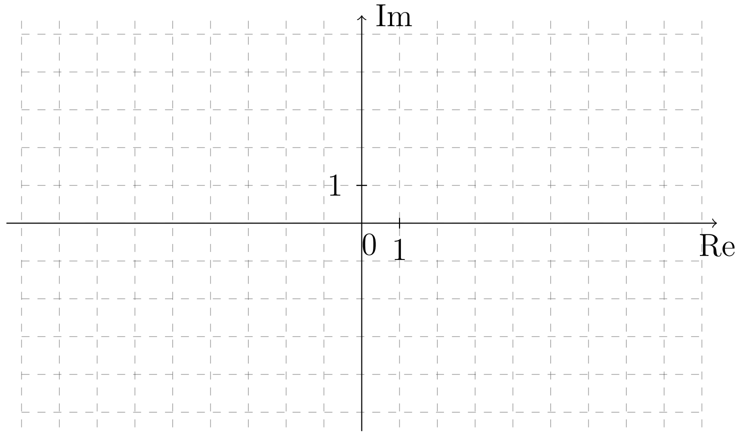
☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z+3-2\mathrm{i}| < 2 \right\}, \quad M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z+6| < |z+2+2\mathrm{i}| \right\}, \quad M_1 \cap M_2$$

in der komplexen Zahlenebene.



Aufgabe 3 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} v.$$

Bestimmen Sie $\dim(\mathrm{Kern}\,(\varphi))$ und eine Basis B von $\mathrm{Kern}\,(\varphi)$.

$\dim(\mathrm{Kern}\,(\varphi)) =$ ☐ , $B :$ ☐

Aufgabe 4 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 0 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 2-\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$\det(A) =$ ☐ , $\mathrm{Sp}(A) =$ ☐

(b) Bestimmen Sie den betragsmäßig größten Eigenwert $\lambda_{\max}$ von A und $\mu_{\max}$ von A^2.

$\lambda_{\max} =$ ☐ , $\mu_{\max} =$ ☐

Aufgabe 5 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Seien $v = \frac{1}{3}(2,1,2)^\intercal$ und $w = \frac{1}{3}(1,2,-2)^\intercal$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie $u \in \mathbb{R}^3$ derart, dass $R : u, v, w$ ein Rechtssystem ist. $u =$ ☐

(b) Sei $A = (u, v, w)$. Bestimmen Sie: $\det(\sqrt{2}A) =$ ☐ .

Aufgabe 6 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben seien bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -4x_1x_2 + 8x_1 - 4x_2 + 8 = 0 \right\}$$

und das Koordinatensystem $\mathbb{G} = \left(P; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

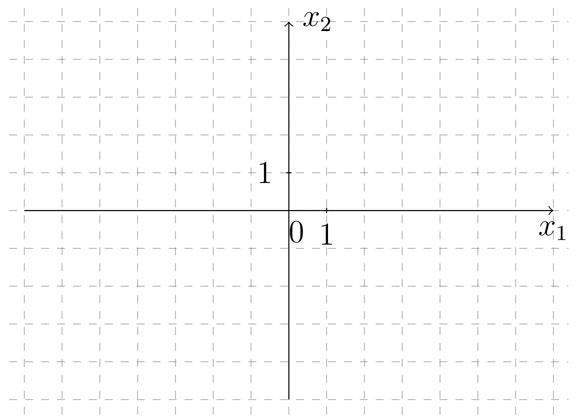
(a) Bestimmen Sie den Ursprung P des Koordinatensystems $\mathbb{G}$ so, dass die Quadrikgleichung in Koordinaten bezüglich $\mathbb{G}$ euklidische Normalform hat.

$\mathbb{G} = \left(\boxed{} ; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(b) Geben Sie die euklidische Normalform der Quadrikgleichung in Koordinaten bezüglich $\mathbb{G}$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{G}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

euklidische Normalform:

$\mathcal{Q}$: ☐



(c) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen.

${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}\left({}_{\mathbb{G}}v\right) =$ ☐ , ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}v\right) =$ ☐

Aufgabe 7 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{C}$ mit den Basen

$$E\colon \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B\colon \begin{pmatrix}2\\-\mathrm{i}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C\colon \begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{}, \quad {}_C\mathrm{id}_E = \boxed{}, \quad {}_C\mathrm{id}_B = \boxed{}.$$

(b) Die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : v \mapsto Av$ soll die folgenden Bedingungen erfüllen

$$\alpha\left(\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \quad \alpha\left(\begin{pmatrix}2\\-\mathrm{i}\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-2\mathrm{i}\\-1\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_C\alpha_C = \boxed{}, \quad {}_E\alpha_C = \boxed{}, \quad {}_E\alpha_E = \boxed{}.$$

Aufgabe 8 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben seien das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$$

und die Gerade g durch die Gleichung $x_2 = -2x_1 - 1$ (in Standardkoordinaten).

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}v\right) = \boxed{}, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}v\right) = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie die Abbildungen ${}_{\mathbb{F}}\beta_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\beta_{\mathbb{E}}$, wobei β die Spiegelung an der Geraden g bezeichnet.

$${}_{\mathbb{F}}\beta_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}v\right) = \boxed{}, \quad {}_{\mathbb{E}}\beta_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}v\right) = \boxed{}$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **17. 7. 2018**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

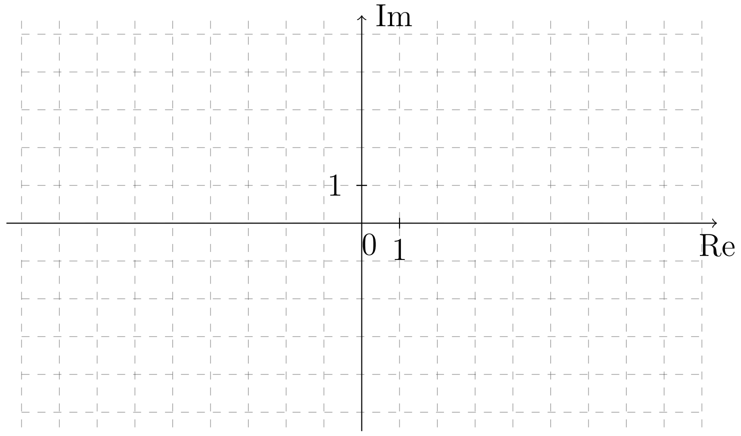
☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 2 - 3\mathrm{i}| < 2 \right\}, \quad M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 4 + 2\mathrm{i}| > |z + 2| \right\}, \quad M_1 \cap M_2$$

in der komplexen Zahlenebene.



Aufgabe 3 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} v.$$

Bestimmen Sie $\dim(\mathrm{Kern}\,(\varphi))$ und eine Basis B von $\mathrm{Kern}\,(\varphi)$.

$B :$ ☐ , $\dim(\mathrm{Kern}\,(\varphi)) =$ ☐

Aufgabe 4 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 0 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 1-2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Spur und die Determinante von A an.

$\mathrm{Sp}\,(A) =$ ☐ , $\det\,(A) =$ ☐

(b) Bestimmen Sie den betragsmäßig größten Eigenwert $\lambda_{\max}$ von A und $\mu_{\max}$ von A^2.

$\lambda_{\max} =$ ☐ , $\mu_{\max} =$ ☐

Aufgabe 5 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Seien $v = \frac{1}{3}(2, 2, 1)^\intercal$ und $w = \frac{1}{3}(1, -2, 2)^\intercal$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie $u \in \mathbb{R}^3$ derart, dass $R : u, v, w$ ein Rechtssystem ist. $u =$ ☐

(b) Sei $A = (u, v, w)$. Bestimmen Sie: $\det(\sqrt{3}A) =$ ☐ .

Aufgabe 6 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben seien bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -4x_1x_2 - 8x_1 - 4x_2 - 8 = 0 \right\}$$

und das Koordinatensystem $\mathbb{G} = \left(P; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

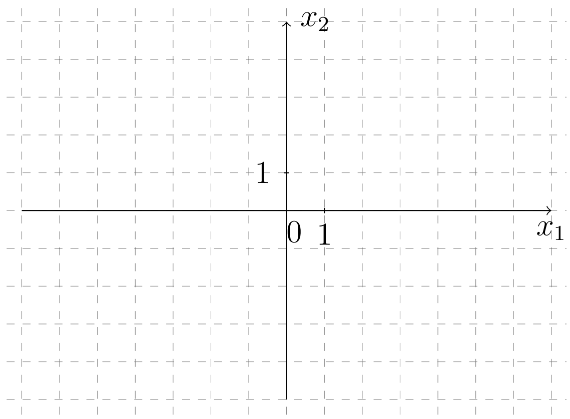
(a) Bestimmen Sie den Ursprung P des Koordinatensystems $\mathbb{G}$ so, dass die Quadrikgleichung in Koordinaten bezüglich $\mathbb{G}$ euklidische Normalform hat.

$\mathbb{G} = \left(\square ; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

(b) Geben Sie die euklidische Normalform der Quadrikgleichung in Koordinaten bezüglich $\mathbb{G}$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{G}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

euklidische Normalform:

$\mathcal{Q}$: ☐



(c) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen.

${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}\left({}_{\mathbb{G}}v\right) =$ ☐ , ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}v\right) =$ ☐

Aufgabe 7 (6 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{C}$ mit den Basen

$$E\colon \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B\colon \begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\\mathrm{i}\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C\colon \begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{}, \quad {}_C\mathrm{id}_E = \boxed{}, \quad {}_C\mathrm{id}_B = \boxed{}.$$

(b) Die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2\colon v \mapsto Av$ soll die folgenden Bedingungen erfüllen

$$\alpha\left(\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\\mathrm{i}\end{pmatrix}, \quad \alpha\left(\begin{pmatrix}0\\-\mathrm{i}\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_C\alpha_C = \boxed{}, \quad {}_E\alpha_C = \boxed{}, \quad {}_E\alpha_E = \boxed{}.$$

Aufgabe 8 (6 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben seien das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\right)$$

und die Gerade g durch die Gleichung $x_2 = 2x_1 - 1$ (in Standardkoordinaten).

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}v\right) = \boxed{}, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}v\right) = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie die Abbildungen ${}_{\mathbb{F}}\beta_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\beta_{\mathbb{E}}$, wobei β die Spiegelung an der Geraden g bezeichnet.

$${}_{\mathbb{F}}\beta_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}v\right) = \boxed{}, \quad {}_{\mathbb{E}}\beta_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}v\right) = \boxed{}$$

☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer: / **Gruppe:**

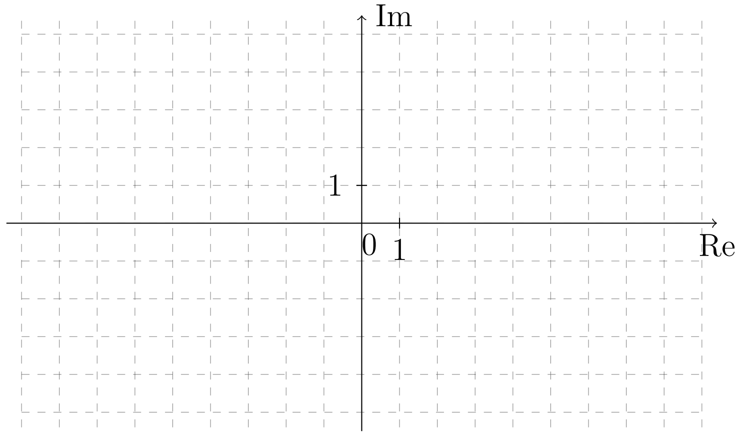
Matrikelnummer							Gruppe	
☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4

Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 3 + 2\mathrm{i}| < 2 \right\}, \quad M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 5 - 4\mathrm{i}| < |z + 3| \right\}, \quad M_1 \cap M_2$$

in der komplexen Zahlenebene.



Aufgabe 3 (2 Punkte) □0 □1 □2

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} v.$$

Bestimmen Sie $\dim(\mathrm{Kern}\,(\varphi))$ und eine Basis B von $\mathrm{Kern}\,(\varphi)$.

$\dim(\mathrm{Kern}\,(\varphi)) =$ ☐ , B : ☐

Aufgabe 4 (4 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 0 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 1-\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$\det(A) =$ ☐ , $\mathrm{Sp}\,(A) =$ ☐

(b) Bestimmen Sie den betragsmäßig größten Eigenwert $\lambda_{\max}$ von A und $\mu_{\max}$ von A^2.

$\lambda_{\max} =$ ☐ , $\mu_{\max} =$ ☐

Aufgabe 5 (2 Punkte) □0 □1 □2

Seien $v = \frac{1}{3}(1, 2, 2)^\intercal$ und $w = \frac{1}{3}(2, 1, -2)^\intercal$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie $u \in \mathbb{R}^3$ derart, dass $R : u, v, w$ ein Rechtssystem ist. $u =$ ☐

(b) Sei $A = (u, v, w)$. Bestimmen Sie: $\det(-\sqrt{2}A) =$ ☐ .

Aufgabe 6 (6 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 □5 □6

Gegeben seien bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -2x_1x_2 + 2x_1 + 4x_2 - 4 = 0 \right\}$$

und das Koordinatensystem $\mathbb{G} = \left(P; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

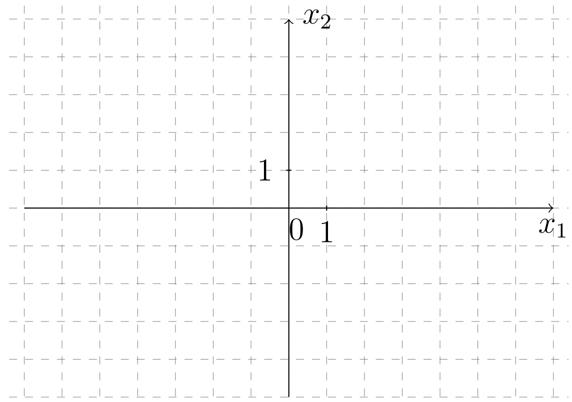
(a) Bestimmen Sie den Ursprung P des Koordinatensystems $\mathbb{G}$ so, dass die Quadrikgleichung in Koordinaten bezüglich $\mathbb{G}$ euklidische Normalform hat.

$\mathbb{G} = \left(\boxed{}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

(b) Geben Sie die euklidische Normalform der Quadrikgleichung in Koordinaten bezüglich $\mathbb{G}$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{G}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

euklidische Normalform:

$\mathcal{Q}$: ☐



(c) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen.

${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}\left({}_{\mathbb{G}}v\right) =$ ☐ , ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}v\right) =$ ☐

Aufgabe 7 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{C}$ mit den Basen

$$E\colon \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B\colon \begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C\colon \begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die folgenden Matrizen:

$$_{E}\mathrm{id}_{B} = \boxed{}, \quad _{C}\mathrm{id}_{E} = \boxed{}, \quad _{C}\mathrm{id}_{B} = \boxed{}.$$

(b) Die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \colon v \mapsto Av$ soll die folgenden Bedingungen erfüllen

$$\alpha\left(\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\2\mathrm{i}\end{pmatrix}, \quad \alpha\left(\begin{pmatrix}0\\-\mathrm{i}\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die folgenden Matrizen:

$$_{C}\alpha_{C} = \boxed{}, \quad _{E}\alpha_{C} = \boxed{}, \quad _{E}\alpha_{E} = \boxed{}.$$

Aufgabe 8 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben seien das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right)$$

und die Gerade g durch die Gleichung $x_2 = -2x_1 + 1$ (in Standardkoordinaten).

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen.

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\left(_{\mathbb{F}}v\right) = \boxed{}, \quad _{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left(_{\mathbb{E}}v\right) = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie die Abbildungen $_{\mathbb{F}}\beta_{\mathbb{F}}$ und $_{\mathbb{E}}\beta_{\mathbb{E}}$, wobei β die Spiegelung an der Geraden g bezeichnet.

$$_{\mathbb{F}}\beta_{\mathbb{F}}\left(_{\mathbb{F}}v\right) = \boxed{}, \quad _{\mathbb{E}}\beta_{\mathbb{E}}\left(_{\mathbb{E}}v\right) = \boxed{}$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **17. 7. 2018**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

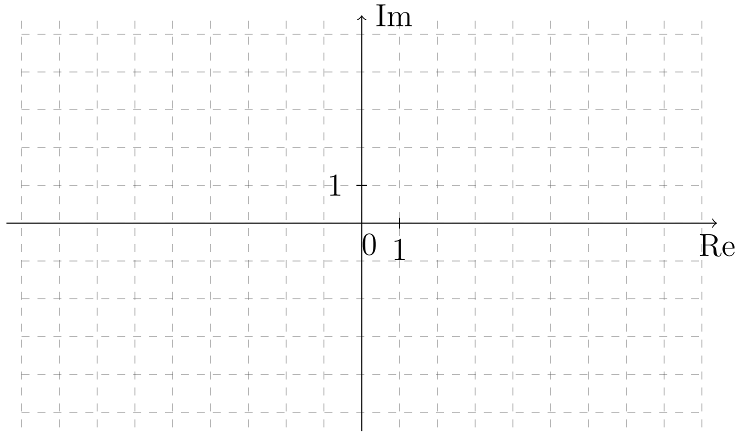
☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z+2+3\mathrm{i}| < 2 \right\}, \quad M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z+4+\mathrm{i}| > |z+1| \right\}, \quad M_1 \cap M_2$$

in der komplexen Zahlenebene.



Aufgabe 3 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} v.$$

Bestimmen Sie $\dim(\operatorname{Kern}(\varphi))$ und eine Basis B von $\operatorname{Kern}(\varphi)$.

$B :$ ☐ , $\dim(\operatorname{Kern}(\varphi)) =$ ☐

Aufgabe 4 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 0 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 1-3\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Spur und die Determinante von A an.

$\operatorname{Sp}(A) =$ ☐ , $\det(A) =$ ☐

(b) Bestimmen Sie den betragsmäßig größten Eigenwert $\lambda_{\max}$ von A und $\mu_{\max}$ von A^2.

$\lambda_{\max} =$ ☐ , $\mu_{\max} =$ ☐

Aufgabe 5 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Seien $v = \frac{1}{3}(2,1,2)^\intercal$ und $w = \frac{1}{3}(-2,2,1)^\intercal$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie $u \in \mathbb{R}^3$ derart, dass $R : u, v, w$ ein Rechtssystem ist. $u =$ ☐

(b) Sei $A = (u, v, w)$. Bestimmen Sie: $\det(-\sqrt{3}A) =$ ☐ .

Aufgabe 6 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben seien bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -2x_1x_2 - 2x_1 + 4x_2 + 4 = 0 \right\}$$

und das Koordinatensystem $\mathbb{G} = \left(P; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

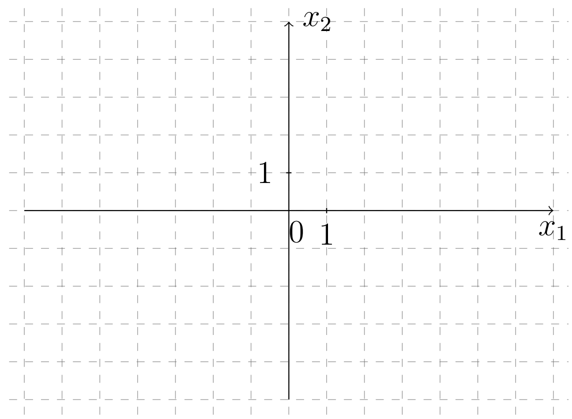
(a) Bestimmen Sie den Ursprung P des Koordinatensystems $\mathbb{G}$ so, dass die Quadrikgleichung in Koordinaten bezüglich $\mathbb{G}$ euklidische Normalform hat.

$\mathbb{G} = \left(\boxed{} ; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(b) Geben Sie die euklidische Normalform der Quadrikgleichung in Koordinaten bezüglich $\mathbb{G}$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{G}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

euklidische Normalform:

$\mathcal{Q}$: ☐



(c) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen.

${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}\left({}_{\mathbb{G}}v\right) =$ ☐ , ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}v\right) =$ ☐