Aufgabe 7 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, für die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\frac{3}{|x-2|} \geqq \frac{x+3}{x-2}.$$

$$\boxed{\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -6 \leqq x < 2 \right\}}$$

Aufgabe 8 (8 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8

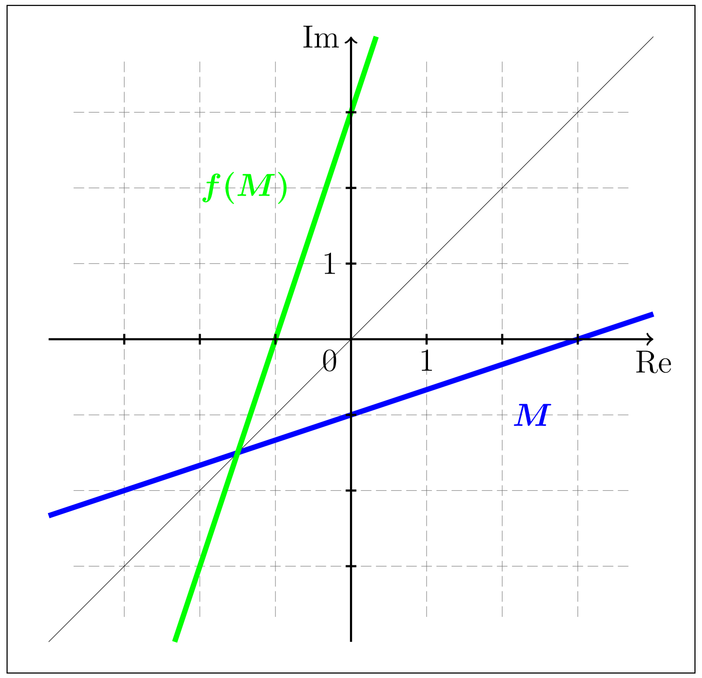
(a) Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\frac{6-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} + \frac{2}{|2+\mathrm{i}|^2} = \boxed{\frac{13}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i}}$$

(b) Gegeben seien $z_1 = \frac{3}{2}(-3 + \mathrm{i}\sqrt{3})$ und $z_2 = \sqrt{2}\cos\left(\frac{7}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sqrt{2}\sin\left(\frac{7}{3}\pi\right)$.
Bestimmen Sie jeweils den Betrag und das Argument der Zahlen z_1 und $z_1 z_2^2$.
Geben Sie dabei die Argumente als Zahlen im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

$$|z_1| = \boxed{3\sqrt{3}}, \ \arg(z_1) = \boxed{\frac{5}{6}\pi}, \ |z_1 z_2^2| = \boxed{6\sqrt{3}}, \ \arg(z_1 z_2^2) = \boxed{\frac{3}{2}\pi}.$$

(c) Seien $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto iz + 2\,\mathrm{Im}(z)$ und $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Im}(z) - \frac{1}{3}\mathrm{Re}(z) + 1 = 0 \right\}$.
Skizzieren Sie M und $f(M)$ in der komplexen Zahlenebene.



Scheinklausur | **Höhere Mathematik 1** | **15. 12. 2018**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ■1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Berechnen Sie die folgenden Summen.

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{6}(-7k+3) = \boxed{-125}$ **(b)** $\displaystyle(1-q)\sum_{k=3}^{10} q^k = \boxed{q^3 - q^{11}}$

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben seien die Punkte P, Q und R sowie die Gerade g in $\mathbb{R}^3$ durch:

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g\colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, die die Punkte P, Q und R enthält.

$$E\colon \boxed{\frac{4}{9}} \cdot x_1 + \boxed{\left(-\frac{1}{9}\right)} \cdot x_2 + \boxed{\frac{8}{9}} \cdot x_3 = \boxed{\frac{2}{9}}$$

(b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt X von g und E sowie den zugehörigen Parameter λ.

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \lambda = 2$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Gegeben sind die folgenden von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängigen Vektoren in $\mathbb{R}^4$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Außerdem sei der Untervektorraum V von $\mathbb{R}^4$ durch $V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \langle x \,|\, w \rangle = 0 \right\}$ gegeben.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ ein Erzeugendensystem von V?

$$\alpha \neq -2$$

(b) Geben Sie eine Basis des Vektorraums V an.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sowie die Basis $B\colon B_1, B_2, B_3, B_4$ des Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \; B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie A bezüglich der Basis B dar.

$$A = \boxed{3}\, B_1 + \boxed{3}\, B_2 + \boxed{(-12)}\, B_3 + \boxed{(-4)}\, B_4$$

(b) Sei nun die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch ${}_E\alpha_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, wobei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ ist. Bestimmen Sie ${}_BA$ und ${}_E\alpha(A)$.

$${}_BA = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad {}_E\alpha(A) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(c) Sei $\beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto Av - 5v$. Bestimmen Sie ${}_E\beta_E$ und ${}_E(\beta \circ \alpha)_B$.

$${}_E\beta_E = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad {}_E(\beta \circ \alpha)_B = \begin{pmatrix} 8 & -16 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben ist das von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ mit

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3\alpha - 9 & -12 & -14 \\ -3\alpha + 9 & -6 & 9\alpha - 13 \\ 0 & 6\alpha - 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad b = \begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $[\,A_\alpha \,||\, b\,]$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{Rg}([\,A_\alpha \,||\, b\,]) = \begin{cases} 3, & \alpha \notin \{\frac{1}{3}, 3\} \\ 2, & \alpha = \frac{1}{3} \\ 2, & \alpha = 3 \end{cases}$$

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems für $\alpha = \frac{1}{3}$.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte) □0 □1 ■2

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, für die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\frac{2}{|x-1|} \geqq \frac{x+5}{x-1}.$$

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -7 \leqq x < 1 \right\}$$

Aufgabe 8 (8 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 ■8

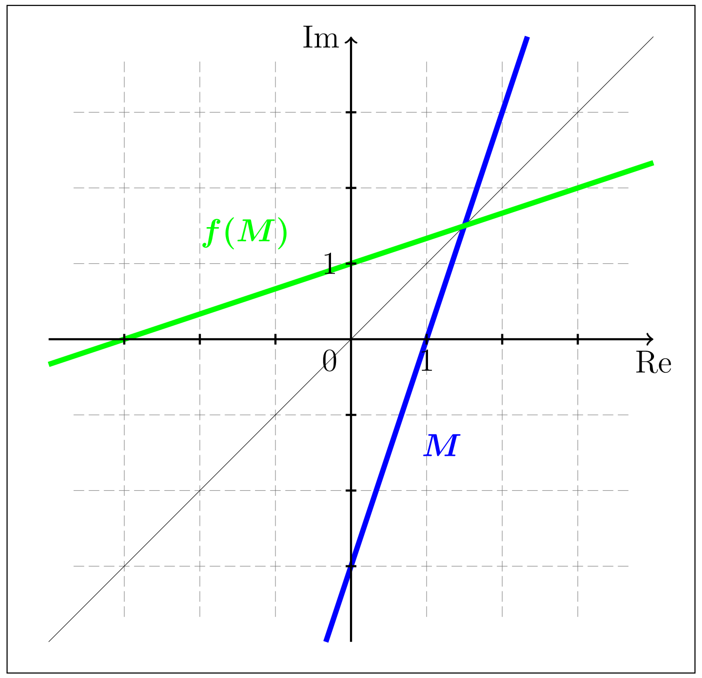
(a) Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\frac{8-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} + \frac{1}{|1+2\mathrm{i}|^2} = \boxed{\frac{7}{5} - \frac{17}{5}\mathrm{i}}$$

(b) Gegeben seien $z_1 = \frac{5}{2}(-\sqrt{3} - 3\mathrm{i})$ und $z_2 = \sqrt{2}\cos\left(\frac{13}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sqrt{2}\sin\left(\frac{13}{6}\pi\right)$.
Bestimmen Sie jeweils den Betrag und das Argument der Zahlen z_1 und $z_1 z_2^2$.
Geben Sie dabei die Argumente als Zahlen im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

$|z_1| = \boxed{5\sqrt{3}}$, $\arg(z_1) = \boxed{\frac{4}{3}\pi}$, $|z_1 z_2^2| = \boxed{10\sqrt{3}}$, $\arg(z_1 z_2^2) = \boxed{\frac{5}{3}\pi}$.

(c) Seien $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto iz + 2\,\mathrm{Im}(z)$ und $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Im}(z) - 3\,\mathrm{Re}(z) + 3 = 0 \right\}$.
Skizzieren Sie M und $f(M)$ in der komplexen Zahlenebene.



Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **15. 12. 2018**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** □1 ■2 □3 □4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) □0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

Gruppe:

□0	□0
□1	□1
□2	□2
□3	□3
□4	□4
□5	□5
□6	□6
□7	□7
□8	□8
□9	□9

Aufgabe 2 (2 Punkte) □0 □1 ■2

Berechnen Sie die folgenden Summen.

(a) $\sum_{k=2}^{6}(6k-8) = \boxed{80}$

(b) $(q-1)\sum_{k=5}^{11} q^k = \boxed{q^{12} - q^5}$

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben seien die Punkte P, Q und R sowie die Gerade g in $\mathbb{R}^3$ durch:

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, die die Punkte P, Q und R enthält.

$$E\colon \boxed{\left(-\frac{3}{7}\right)} \cdot x_1 + \boxed{\frac{2}{7}} \cdot x_2 + \boxed{\frac{6}{7}} \cdot x_3 = \boxed{\frac{10}{7}}$$

(b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt X von g und E sowie den zugehörigen Parameter λ.

$$X = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \lambda = -3$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Gegeben sind die folgenden von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängigen Vektoren in $\mathbb{R}^4$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 4 \\ 4 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Außerdem sei der Untervektorraum V von $\mathbb{R}^4$ durch $V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \langle x \,|\, w \rangle = 0 \right\}$ gegeben.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ ein Erzeugendensystem von V?

$$\alpha \neq 4$$

(b) Geben Sie eine Basis des Vektorraums V an.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sowie die Basis $B\colon B_1, B_2, B_3, B_4$ des Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \; B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie A bezüglich der Basis B dar.

$$A = \boxed{(-9)}\, B_1 + \boxed{1}\, B_2 + \boxed{(-8)}\, B_3 + \boxed{6}\, B_4$$

(b) Sei nun die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch ${}_E\alpha_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, wobei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ ist. Bestimmen Sie ${}_BA$ und ${}_E\alpha(A)$.

$${}_BA = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad {}_E\alpha(A) = \begin{pmatrix} 11 \\ 20 \end{pmatrix}$$

(c) Sei $\beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto Av - 5v$. Bestimmen Sie ${}_E\beta_E$ und ${}_E(\beta \circ \alpha)_B$.

$${}_E\beta_E = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad {}_E(\beta \circ \alpha)_B = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben ist das von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ mit

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 8\alpha - 2 & -12 & 2 \\ -8\alpha + 2 & 3 & 12\alpha - 5 \\ 0 & 3\alpha - 6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad b = \begin{pmatrix} 42 \\ -42 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $[\,A_\alpha \,||\, b\,]$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{Rg}([\,A_\alpha \,||\, b\,]) = \begin{cases} 3, & \alpha \notin \{\frac{1}{4}, 2\} \\ 2, & \alpha = \frac{1}{4} \\ 2, & \alpha = 2 \end{cases}$$

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems für $\alpha = 2$.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ \frac{7}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte)

☐0 ☐1 ■2

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$, für die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\frac{2}{|x-4|} \geqq \frac{x-1}{x-4}.$$

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -1 \leqq x < 4 \right\}$$

Aufgabe 8 (8 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8

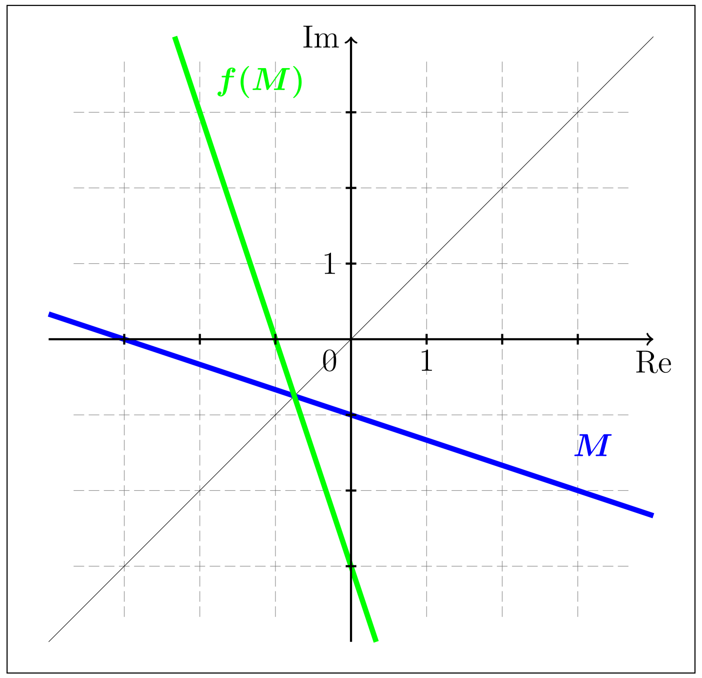
(a) Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\frac{7-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} + \frac{3}{|2+\mathrm{i}|^2} = \boxed{\frac{16}{5} - \frac{9}{5}\mathrm{i}}$$

(b) Gegeben seien $z_1 = \frac{3}{2}(-\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2})$ und $z_2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sqrt{3}\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)$.
Bestimmen Sie jeweils den Betrag und das Argument der Zahlen z_1 und $z_1 z_2^2$.
Geben Sie dabei die Argumente als Zahlen im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

$|z_1| = \boxed{3\sqrt{2}}$, $\arg(z_1) = \boxed{\frac{7}{6}\pi}$, $|z_1 z_2^2| = \boxed{9\sqrt{2}}$, $\arg(z_1 z_2^2) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

(c) Seien $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto iz + 2\,\mathrm{Im}(z)$ und $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Im}(z) + \frac{1}{3}\mathrm{Re}(z) + 1 = 0 \right\}$.
Skizzieren Sie M und $f(M)$ in der komplexen Zahlenebene.



Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **15. 12. 2018**

☐1 ☐2 ■3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (2 Punkte)

☐0 ☐1 ■2

Berechnen Sie die folgenden Summen.

(a) $\sum_{k=2}^{6}(-8k+5) = \boxed{-135}$

(b) $(1-q)\sum_{k=4}^{12} q^k = \boxed{q^4 - q^{13}}$

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben seien die Punkte P, Q und R sowie die Gerade g in $\mathbb{R}^3$ durch:

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g\colon X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, die die Punkte P, Q und R enthält.

$$E\colon \quad \boxed{\frac{8}{9}} \cdot x_1 + \boxed{\frac{4}{9}} \cdot x_2 + \boxed{\left(-\frac{1}{9}\right)} \cdot x_3 = \boxed{\frac{5}{9}}$$

(b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt X von g und E sowie den zugehörigen Parameter λ.

$$X = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \lambda = -4$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Gegeben sind die folgenden von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängigen Vektoren in $\mathbb{R}^4$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Außerdem sei der Untervektorraum V von $\mathbb{R}^4$ durch $V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \langle x \,|\, w \rangle = 0 \right\}$ gegeben.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ ein Erzeugendensystem von V?

$$\alpha \neq 6$$

(b) Geben Sie eine Basis des Vektorraums V an.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sowie die Basis $B\colon B_1, B_2, B_3, B_4$ des Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \; B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie A bezüglich der Basis B dar.

$$A = \boxed{(-6)} B_1 + \boxed{(-3)} B_2 + \boxed{12} B_3 + \boxed{2} B_4$$

(b) Sei nun die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch ${}_E\alpha_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, wobei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ ist. Bestimmen Sie ${}_BA$ und ${}_E\alpha(A)$.

$${}_BA = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad {}_E\alpha(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

(c) Sei $\beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto Av - 5v$. Bestimmen Sie ${}_E\beta_E$ und ${}_E(\beta \circ \alpha)_B$.

$${}_E\beta_E = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \qquad {}_E(\beta \circ \alpha)_B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 8 & -16 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben ist das von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ mit

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 6\alpha + 2 & -12 & 7 \\ -6\alpha - 2 & -4 & 12\alpha - 3 \\ 0 & 4\alpha + 8 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad b = \begin{pmatrix} -40 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $[\,A_\alpha \,||\, b\,]$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{Rg}([\,A_\alpha \,||\, b\,]) = \begin{cases} 3, & \alpha \notin \{-2, -\frac{1}{3}\} \\ 2, & \alpha = -2 \\ 2, & \alpha = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems für $\alpha = -2$.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, für die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\frac{1}{|x-3|} \geqq \frac{x+4}{x-3}.$$

$$\boxed{\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -5 \leqq x < 3 \right\}}$$

Aufgabe 8 (8 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8

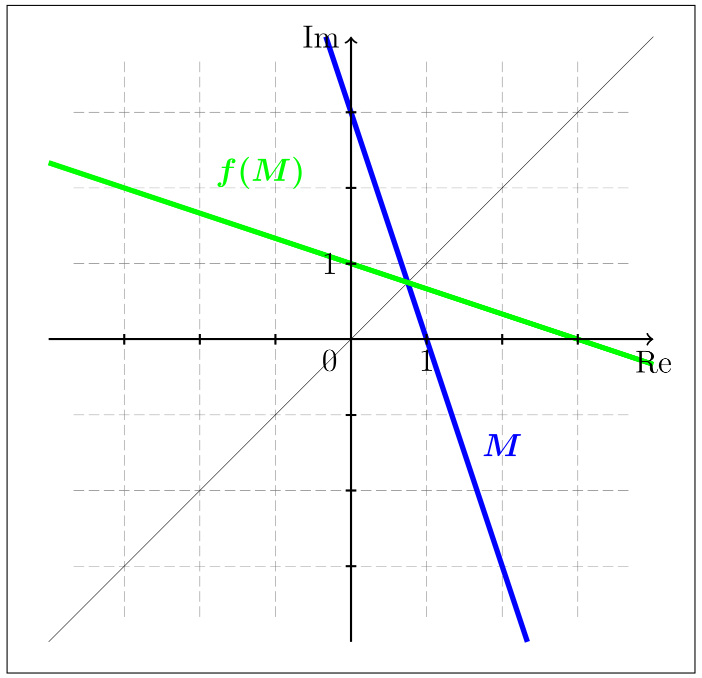
(a) Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\frac{5-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} + \frac{1}{|1+2\mathrm{i}|^2} = \boxed{\frac{4}{5} - \frac{11}{5}\mathrm{i}}$$

(b) Gegeben seien $z_1 = \frac{5}{2}(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{6})$ und $z_2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sqrt{3}\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)$.
Bestimmen Sie jeweils den Betrag und das Argument der Zahlen z_1 und $z_1 z_2^2$.
Geben Sie dabei die Argumente als Zahlen im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

$$|z_1| = \boxed{5\sqrt{2}}, \ \arg(z_1) = \boxed{\frac{5}{3}\pi}, \ |z_1 z_2^2| = \boxed{15\sqrt{2}}, \ \arg(z_1 z_2^2) = \boxed{\frac{4}{3}\pi}.$$

(c) Seien $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto iz + 2\,\mathrm{Im}(z)$ und $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Im}(z) + 3\,\mathrm{Re}(z) - 3 = 0 \right\}$.
Skizzieren Sie M und $f(M)$ in der komplexen Zahlenebene.



+4/1/54+

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ■4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Berechnen Sie die folgenden Summen.

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{6} (7k-5) = \boxed{115}$

(b) $\displaystyle(q-1)\sum_{k=2}^{11} q^k = \boxed{q^{12} - q^2}$

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben seien die Punkte P, Q und R sowie die Gerade g in $\mathbb{R}^3$ durch:

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, die die Punkte P, Q und R enthält.

$$E\colon \boxed{\frac{6}{7}} \cdot x_1 + \boxed{\left(-\frac{2}{7}\right)} \cdot x_2 + \boxed{\left(-\frac{3}{7}\right)} \cdot x_3 = \boxed{\frac{9}{7}}$$

(b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt X von g und E sowie den zugehörigen Parameter λ.

$$X = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \lambda = 3$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Gegeben sind die folgenden von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängigen Vektoren in $\mathbb{R}^4$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ \alpha \\ -3 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Außerdem sei der Untervektorraum V von $\mathbb{R}^4$ durch $V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \langle x \,|\, w \rangle = 0 \right\}$ gegeben.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ ein Erzeugendensystem von V?

$$\alpha \neq -3$$

(b) Geben Sie eine Basis des Vektorraums V an.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sowie die Basis $B\colon B_1, B_2, B_3, B_4$ des Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \; B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie A bezüglich der Basis B dar.

$$A = \boxed{9}\, B_1 + \boxed{(-2)}\, B_2 + \boxed{8}\, B_3 + \boxed{(-2)}\, B_4$$

(b) Sei nun die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch ${}_E\alpha_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, wobei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ ist. Bestimmen Sie ${}_BA$ und ${}_E\alpha(A)$.

$${}_BA = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad {}_E\alpha(A) = \begin{pmatrix} -13 \\ -12 \end{pmatrix}$$

(c) Sei $\beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto Av - 5v$. Bestimmen Sie ${}_E\beta_E$ und ${}_E(\beta \circ \alpha)_B$.

$${}_E\beta_E = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & -7 \end{pmatrix} \qquad {}_E(\beta \circ \alpha)_B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 7 & -14 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben ist das von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ mit

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 4\alpha - 2 & -6 & 7 \\ -4\alpha + 2 & -3 & 6\alpha - 10 \\ 0 & 3\alpha + 9 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad b = \begin{pmatrix} 42 \\ -42 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $[\,A_\alpha \,||\, b\,]$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{Rg}([\,A_\alpha \,||\, b\,]) = \begin{cases} 3, & \alpha \notin \{-3, \frac{1}{2}\} \\ 2, & \alpha = -3 \\ 2, & \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems für $\alpha = -3$.

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$