



Aufgabe 7 (3 Punkte)

0 1 2 3

Gegeben ist die Funktion in Potenzreihendarstellung

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-9)^n}{(2n-1)!} x^{4n-1}.$$

(a) Geben Sie die Stammfunktion F von f mit $F(0) = 1$ als Potenzreihe an.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-9)^n}{(2n)!} x^{4n}$$

(b) Stellen Sie $F(x)$ und $f(x)$ jeweils in geschlossener Form dar.

$$F(x) = \cos(3x^2), \quad f(x) = -6x \sin(3x^2)$$

Aufgabe 8 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Für Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Parametrisierung

$$C: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ at + b \end{pmatrix}$$

einer Kurve K gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Konstanten a, b so, dass C eine Kurve K von $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ parametrisiert.

$$a = 2, \quad b = -3$$

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve K aus (a). $L(K) = \sqrt{5}$

(c) Gegeben sei das Vektorfeld

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 8x_1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential U von f so, dass $U(0,0) = 2$ gilt.

$$U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4x_1^2 - 3x_2 + 2$$

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral von f längs K aus (a).

$$\int_K f(x) \cdot dx = -2$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

Gruppe:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 2** (2 Punkte) 0 1 2

Gegeben sind die Abbildungen

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ 4x_2 + 1 \end{pmatrix}, \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto 2y_1.$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen Jf und $Jg(f(x))$.

$$Jf \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad Jg \left(f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

Gegeben sei die folgende Abbildung

$$f: (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \frac{2(y-1)^2 + 1}{x}.$$

- (a) Geben Sie die drei Gleichungen (in x , y und λ) an, welche die Bedingungen von Lagrange für relative Extrema von f auf der Menge $M := \{(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$ beschreiben.

$$\begin{aligned} -\frac{2(y-1)^2 + 1}{x^2} + 2\lambda x &= 0 \\ \frac{4(y-1)}{x} &= 0 \\ x^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

- (b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f auf M und geben Sie den Funktionswert sowie den Typ an.

Stelle	Funktionswert	Typ
$(-1, 1)$	-1	relatives Maximum
$(1, 1)$	1	relatives Minimum

Aufgabe 4 (3 Punkte) 0 1 2 3

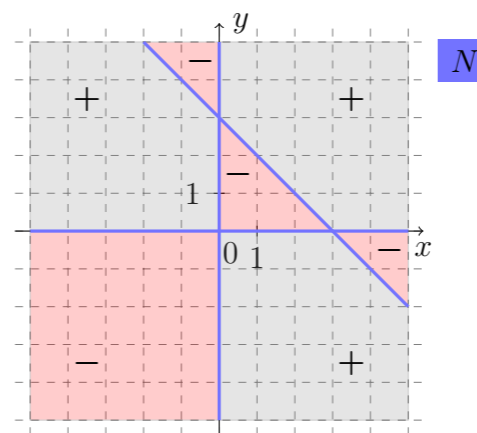
Berechnen Sie:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4(-1)^n - \frac{1}{n} + 12 \right)$	$\lim_{N \rightarrow +\infty} 6 \sum_{k=0}^N \left(-\frac{1}{2} \right)^k$	$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b 5x^2 - x^3 \, dx$
8	4	$-\infty$

+1000/2/59+

Aufgabe 5 (8 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6 7 8Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto xy(y+x-3)$.

- (a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ von f für $-5 \leq x \leq 5$ und $-5 \leq y \leq 5$, und markieren Sie die Bereiche, in denen f positive bzw. negative Werte annimmt, mit „+“ bzw. „-“.



- (b) Berechnen Sie: $\text{grad } f(x, y) =$

$$\begin{pmatrix} y(2x+y-3) \\ x(x+2y-3) \end{pmatrix}$$

- (c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und geben Sie jeweils deren Typ an.

Stelle	Typ
$(0, 0)$	Sattelpunkt
$(3, 0)$	Sattelpunkt
$(0, 3)$	Sattelpunkt
$(1, 1)$	lokales Minimum

- (d) Bestimmen Sie die Tangente an die Niveaulinie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 3\}$ im Punkt $(1, -1)$.

$$2x + (-4)y + (-6) = 0$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

Führen Sie eine Polynomdivision sowie eine Partialbruchzerlegung durch.

- (a) Polynomdivision:

$$\frac{2x^2 - 3x - 8}{x^2 - x - 2} = 2 + \frac{-x - 4}{x^2 - x - 2}$$

- (b) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x^2 - 3x - 8}{x^2 - x - 2} = 2 + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2}$$



Aufgabe 7 (3 Punkte)

0 1 2 3

Gegeben ist die Funktion in Potenzreihendarstellung

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-4)^n}{(2n-1)!} x^{4n-1}.$$

(a) Geben Sie die Stammfunktion F von f mit $F(0) = 1$ als Potenzreihe an.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} x^{4n}$$

(b) Stellen Sie $F(x)$ und $f(x)$ jeweils in geschlossener Form dar.

$$F(x) = \cos(2x^2), \quad f(x) = -4x \sin(2x^2)$$

Aufgabe 8 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Für Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Parametrisierung

$$C: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ at + b \end{pmatrix}$$

einer Kurve K gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Konstanten a, b so, dass C eine Kurve K von $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ parametrisiert.

$$a = -3, \quad b = -2$$

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve K aus (a). $L(K) = \sqrt{10}$

(c) Gegeben sei das Vektorfeld

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -6x_1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential U von f so, dass $U(0,0) = -3$ gilt.

$$U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -3x_1^2 + 4x_2 - 3$$

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral von f längs K aus (a).

$$\int_K f(x) \cdot dx = -15$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Gruppe:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

**Aufgabe 2** (2 Punkte) 0 1 2

Gegeben sind die Abbildungen

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_3 + 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}, \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto -y_2.$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen Jf und $Jg(f(x))$.

$$Jf \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad Jg \left(f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

Gegeben sei die folgende Abbildung

$$f: \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \frac{2(x+1)^2 + 1}{y}.$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen (in x , y und λ) an, welche die Bedingungen von Lagrange für relative Extrema von f auf der Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \mid y^2 = 1\}$ beschreiben.

$$\begin{aligned} \frac{4(x+1)}{y} &= 0 \\ -\frac{2(x+1)^2 + 1}{y^2} + 2\lambda y &= 0 \\ y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f auf M und geben Sie den Funktionswert sowie den Typ an.

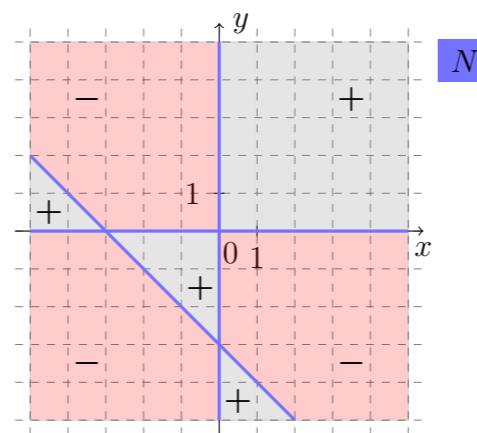
Stelle	Funktionswert	Typ
$(-1, -1)$	-1	relatives Maximum
$(-1, 1)$	1	relatives Minimum

Aufgabe 4 (3 Punkte) 0 1 2 3

Berechnen Sie:

$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b 2x^2 - x^3 \, dx$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3(-1)^n + \frac{1}{n} + 10 \right)$	$\lim_{N \rightarrow +\infty} 4 \sum_{k=0}^N \left(-\frac{1}{3} \right)^k$
$-\infty$	7	3

+2000/2/57+

Aufgabe 5 (8 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6 7 8Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto xy(y+x+3)$.(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ von f für $-5 \leq x \leq 5$ und $-5 \leq y \leq 5$, und markieren Sie die Bereiche, in denen f positive bzw. negative Werte annimmt, mit „+“ bzw. „-“.(b) Berechnen Sie: $\text{grad } f(x, y) =$

$$\begin{pmatrix} y(2x+y+3) \\ x(x+2y+3) \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und geben Sie jeweils deren Typ an.

Stelle	Typ
$(0, 0)$	Sattelpunkt
$(-3, 0)$	Sattelpunkt
$(0, -3)$	Sattelpunkt
$(-1, -1)$	lokales Maximum

(d) Bestimmen Sie die Tangente an die Niveaulinie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = -3\}$ im Punkt $(1, -1)$.

$$(-4)x + 2y + 6 = 0$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

Führen Sie eine Polynomdivision sowie eine Partialbruchzerlegung durch.

(a) Polynomdivision:

$$\frac{3x^2 + 6x - 3}{x^2 + x - 2} = 3 + \frac{3x + 3}{x^2 + x - 2}$$

(b) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{3x^2 + 6x - 3}{x^2 + x - 2} = 3 + \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-1}$$



Aufgabe 7 (3 Punkte)

0 1 2 3

Gegeben ist die Funktion in Potenzreihendarstellung

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-25)^n}{(2n-1)!} x^{4n-1}.$$

(a) Geben Sie die Stammfunktion F von f mit $F(0) = 1$ als Potenzreihe an.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-25)^n}{(2n)!} x^{4n}$$

(b) Stellen Sie $F(x)$ und $f(x)$ jeweils in geschlossener Form dar.

$$F(x) = \cos(5x^2), \quad f(x) = -10x \sin(5x^2)$$

Aufgabe 8 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Für Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Parametrisierung

$$C: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ at + b \end{pmatrix}$$

einer Kurve K gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Konstanten a, b so, dass C eine Kurve K von $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ parametrisiert.

$$a = -2, \quad b = 3$$

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve K aus (a). $L(K) = \sqrt{5}$

(c) Gegeben sei das Vektorfeld

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 10x_1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential U von f so, dass $U(0,0) = -2$ gilt.

$$U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5x_1^2 - 2x_2 - 2$$

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral von f längs K aus (a).

$$\int_K f(x) \cdot dx = 9$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

0 0 0 0 0 0 0
 1 1 1 1 1 1 1
 2 2 2 2 2 2 2
 3 3 3 3 3 3 3
 4 4 4 4 4 4 4
 5 5 5 5 5 5 5
 6 6 6 6 6 6 6
 7 7 7 7 7 7 7
 8 8 8 8 8 8 8
 9 9 9 9 9 9 9

Gruppe:

0 0
 1 1
 2 2
 3 3
 4 4
 5 5
 6 6
 7 7
 8 8
 9 9

**Aufgabe 2** (2 Punkte) 0 1 2

Gegeben sind die Abbildungen

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_2 - 1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto 2y_2.$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen Jf und $Jg(f(x))$.

$$Jf \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad Jg \left(f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

Gegeben sei die folgende Abbildung

$$f: (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \frac{2(y+1)^2 + 2}{x}.$$

- (a) Geben Sie die drei Gleichungen (in x , y und λ) an, welche die Bedingungen von Lagrange für relative Extrema von f auf der Menge $M := \{(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$ beschreiben.

$$\begin{aligned} -\frac{2(y+1)^2 + 2}{x^2} + 2\lambda x &= 0 \\ \frac{4(y+1)}{x} &= 0 \\ x^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

- (b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f auf M und geben Sie den Funktionswert sowie den Typ an.

Stelle	Funktionswert	Typ
$(-1, -1)$	-2	relatives Maximum
$(1, -1)$	2	relatives Minimum

Aufgabe 4 (3 Punkte) 0 1 2 3

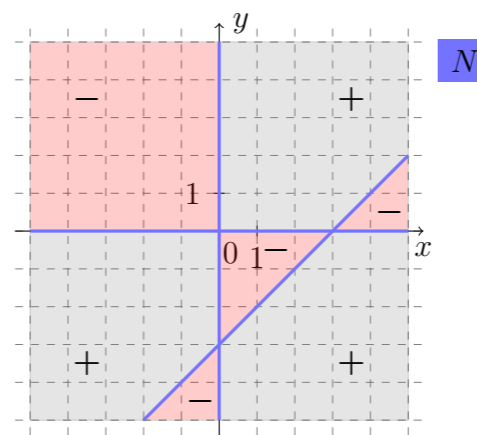
Berechnen Sie:

$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(2(-1)^n + \frac{1}{n} - 7 \right)$	$\lim_{N \rightarrow +\infty} 4 \sum_{k=0}^N \left(\frac{1}{3} \right)^k$	$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b 4x^2 - x^3 \, dx$
-5	6	$-\infty$

+3000/2/55+

Aufgabe 5 (8 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6 7 8Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto xy(y - x + 3)$.

- (a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ von f für $-5 \leq x \leq 5$ und $-5 \leq y \leq 5$, und markieren Sie die Bereiche, in denen f positive bzw. negative Werte annimmt, mit „+“ bzw. „-“.



- (b) Berechnen Sie: $\text{grad } f(x, y) =$

$$\begin{pmatrix} y(-2x + y + 3) \\ x(-x + 2y + 3) \end{pmatrix}$$

- (c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und geben Sie jeweils deren Typ an.

Stelle	Typ
$(0, 0)$	Sattelpunkt
$(3, 0)$	Sattelpunkt
$(0, -3)$	Sattelpunkt
$(1, -1)$	lokales Minimum

- (d) Bestimmen Sie die Tangente an die Niveaulinie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 3\}$ im Punkt $(-1, -1)$.

$$\boxed{-4} x + \boxed{-2} y + \boxed{-6} = 0$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

Führen Sie eine Polynomdivision sowie eine Partialbruchzerlegung durch.

- (a) Polynomdivision:

$$\frac{-2x^2 + 5x - 1}{x^2 - 3x + 2} = -2 + \frac{-x + 3}{x^2 - 3x + 2}$$

- (b) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{-2x^2 + 5x - 1}{x^2 - 3x + 2} = -2 - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$



Aufgabe 7 (3 Punkte)

0 1 2 3

Gegeben ist die Funktion in Potenzreihendarstellung

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-16)^n}{(2n-1)!} x^{4n-1}.$$

(a) Geben Sie die Stammfunktion F von f mit $F(0) = 1$ als Potenzreihe an.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-16)^n}{(2n)!} x^{4n}$$

(b) Stellen Sie $F(x)$ und $f(x)$ jeweils in geschlossener Form dar.

$$F(x) = \cos(4x^2), \quad f(x) = -8x \sin(4x^2)$$

Aufgabe 8 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Für Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Parametrisierung

$$C: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ at + b \end{pmatrix}$$

einer Kurve K gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Konstanten a, b so, dass C eine Kurve K von $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ parametrisiert.

$$a = 3, \quad b = 2$$

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve K aus (a). $L(K) = \sqrt{10}$

(c) Gegeben sei das Vektorfeld

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4x_1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential U von f so, dass $U(0,0) = 3$ gilt.

$$U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -2x_1^2 + 5x_2 + 3$$

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral von f längs K aus (a).

$$\int_K f(x) \cdot dx = 13$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

Gruppe:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 2** (2 Punkte) 0 1 2

Gegeben sind die Abbildungen

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 4x_1 - 1 \end{pmatrix}, \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto -y_1.$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen Jf und $Jg(f(x))$.

$$Jf \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Jg \left(f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

Gegeben sei die folgende Abbildung

$$f: \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \frac{2(x-1)^2 + 2}{y}$$

- (a) Geben Sie die drei Gleichungen (in x , y und λ) an, welche die Bedingungen von Lagrange für relative Extrema von f auf der Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \mid y^2 = 1\}$ beschreiben.

$$\begin{aligned} \frac{4(x-1)}{y} &= 0 \\ -\frac{2(x-1)^2 + 2}{y^2} + 2\lambda y &= 0 \\ y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

- (b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f auf M und geben Sie den Funktionswert sowie den Typ an.

Stelle	Funktionswert	Typ
(1, -1)	-2	relatives Maximum
(1, 1)	2	relatives Minimum

Aufgabe 4 (3 Punkte) 0 1 2 3

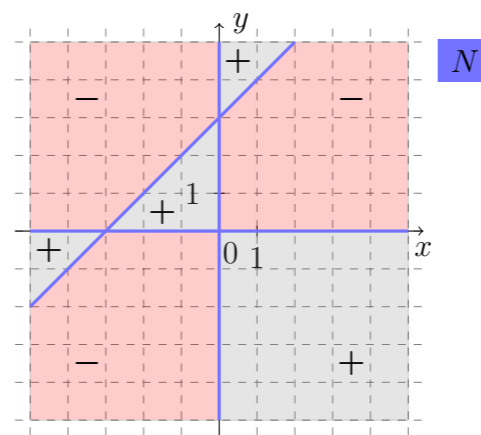
Berechnen Sie:

$\lim_{N \rightarrow +\infty} 5 \sum_{k=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^k$	$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b 7x^2 - x^3 \, dx$	$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(5(-1)^n - \frac{1}{n} - 7\right)$
10	$-\infty$	-2

+4000/2/53+

Aufgabe 5 (8 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6 7 8Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto xy(y-x-3)$.

- (a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ von f für $-5 \leq x \leq 5$ und $-5 \leq y \leq 5$, und markieren Sie die Bereiche, in denen f positive bzw. negative Werte annimmt, mit „+“ bzw. „-“.



- (b) Berechnen Sie: $\text{grad } f(x, y) =$

$$\begin{pmatrix} y(-2x + y - 3) \\ x(-x + 2y - 3) \end{pmatrix}$$

- (c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und geben Sie jeweils deren Typ an.

Stelle	Typ
(0, 0)	Sattelpunkt
(-3, 0)	Sattelpunkt
(0, 3)	Sattelpunkt
(-1, 1)	lokales Maximum

- (d) Bestimmen Sie die Tangente an die Niveaulinie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = -3\}$ im Punkt $(-1, -1)$.

$$2x + 4y + 6 = 0$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

Führen Sie eine Polynomdivision sowie eine Partialbruchzerlegung durch.

- (a) Polynomdivision:

$$\frac{-3x^2 - 8x - 6}{x^2 + 3x + 2} = -3 + \frac{x}{x^2 + 3x + 2}$$

- (b) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{-3x^2 - 8x - 6}{x^2 + 3x + 2} = -3 + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$