



Aufgabe 6 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 e^{x-1} + \cos(2\pi x) + 2$. Bestimmen Sie die Ableitungen:

$$f'(x) = \boxed{(x^2 + 2x)e^{x-1} - 2\pi \sin(2\pi x)} \quad f''(x) = \boxed{(x^2 + 4x + 2)e^{x-1} - 4\pi^2 \cos(2\pi x)}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$T_2(f, x, 1) = \boxed{4} + \boxed{3} \cdot (x - 1) + \boxed{\left(\frac{7}{2} - 2\pi^2\right)} \cdot (x - 1)^2$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{2 \cdot 5^{k-1}} (z - 4i + 3)^k$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k^2} (5z - \sqrt{2})^k$	$\sum_{k=3}^{\infty} ((3+i)z - 3)^k$
z_0	$4i - 3$	$\frac{\sqrt{2}}{5}$	$\frac{9 - 3i}{10}$
ρ	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$

Aufgabe 8 (3 Punkte)

0 1 2 3

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung für

$$\frac{x^2 + 9x + 13}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{\boxed{2}}{x+1} + \frac{\boxed{5}}{(x+1)^2} + \frac{\boxed{-1}}{x+2}$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

Gruppe:

0 0 0 0 0 0 0
 1 1 1 1 1 1 1
 2 2 2 2 2 2 2
 3 3 3 3 3 3 3
 4 4 4 4 4 4 4
 5 5 5 5 5 5 5
 6 6 6 6 6 6 6
 7 7 7 7 7 7 7
 8 8 8 8 8 8 8
 9 9 9 9 9 9 9

0 0
 1 1
 2 2
 3 3
 4 4
 5 5
 6 6
 7 7
 8 8
 9 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Berechnen Sie:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{x} + 4x + 6}{1 - 4\sqrt{x} + 5x}$	$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{7^k}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\tan\left(\frac{x\pi}{3}\right)}{x^2 - 9}$
$\frac{4}{5}$	$e^3 - 4$	$\frac{7}{2}$	$\frac{\pi}{18}$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (x^2 - 3x - 9)e^x$.

(a) Berechnen Sie $f'(x) = (x^2 - x - 12)e^x$ und $f''(x) = (x^2 + x - 13)e^x$.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f sowie deren Typ (lok. Max./lok. Min./Sattelpunkt).

Kritische Stelle	Typ
$x = -3$	lokales Maximum
$x = 4$	lokales Minimum

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$\int \frac{-1}{x(1 + \ln(x))} dx$	$\int_1^2 \frac{1}{x(1 + \ln(x))} dx$	$\int 2e^x \sin(x) dx$	$\int_0^{+\infty} \frac{6}{1 + x^2} dx$
$[-\ln(1 + \ln(x))]$	$\ln(1 + \ln(2))$	$[e^x(\sin(x) - \cos(x))]$	3π

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Gegeben sind die folgenden Abbildungen.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 5(x - y)^2 + z(x - y) \quad g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 9$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f . $\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10(x - y) + z \\ -10(x - y) - z \\ x - y \end{pmatrix}$

(b) Geben Sie die vier Gleichungen (in x, y, z und λ) an, die die Bedingungen von Lagrange für

lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ beschreiben.

$$\begin{aligned} 10(x - y) + z + 2\lambda x &= 0 \\ -10(x - y) - z + 2\lambda y &= 0 \\ x - y + 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 &= 0 \end{aligned}$$

(c) Gegeben ist eine weitere Abbildung

$$h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto z^2 + 2xy.$$

Wir betrachten die Abbildung f unter den Nebenbedingungen $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ und $h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$.

Die Anwendung der Multiplikatormethode nach Lagrange ergibt die folgenden kritischen Stellen als Kandidaten für Extremalstellen.

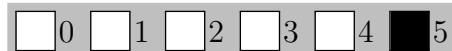
$$P_1 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^T, P_2 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^T, P_3 = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^T, P_4 = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^T$$

Bestimmen Sie den kleinsten Wert, den f unter den beiden Nebenbedingungen annimmt.

Kleinsten Wert : $9 \left(5 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



Aufgabe 6 (5 Punkte)



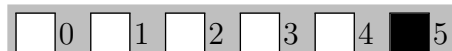
Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -2x^2e^{x-1} + \cos(\pi x) + 2$. Bestimmen Sie die Ableitungen:

$$f'(x) = \boxed{(-2x^2 - 4x)e^{x-1} - \pi \sin(\pi x)} \quad f''(x) = \boxed{(-2x^2 - 8x - 4)e^{x-1} - \pi^2 \cos(\pi x)}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$T_2(f, x, 1) = \boxed{-1} + \boxed{-6} \cdot (x - 1) + \boxed{\left(\frac{\pi^2}{2} - 7\right)} \cdot (x - 1)^2$$

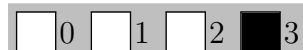
Aufgabe 7 (5 Punkte)



Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k-2}}{7 \cdot 3^{k+1}} (z - 2i + 1)^k$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k^2 + 2} (3z + \sqrt{5})^k$	$\sum_{k=2}^{\infty} ((4 - i)z + 6)^k$
z_0	$2i - 1$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	$-\frac{24 + 6i}{17}$
ρ	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{\sqrt{17}}$

Aufgabe 8 (3 Punkte)



Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung für

$$\frac{x^2 + 9x + 12}{(x + 2)^2(x + 3)} = \frac{\boxed{7}}{x + 2} + \frac{\boxed{-2}}{(x + 2)^2} + \frac{\boxed{-6}}{x + 3}$$



Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1 + x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)



Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

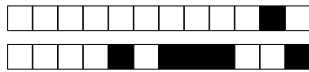
Matrikelnummer:

Gruppe:

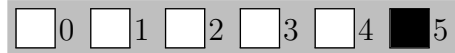
<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:



Aufgabe 2 (5 Punkte)



Berechnen Sie:

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^k}{k!}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{7^k}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{\arctan(x^2 - 9)}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{\frac{3}{2}} + x + 2}{2 - 3x^{\frac{3}{2}} + 2x}$
$e^4 - 5$	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{2}{3}$

Aufgabe 3 (4 Punkte)



Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (x^2 + x - 11)e^x$.

(a) Berechnen Sie $f'(x) = (x^2 + 3x - 10)e^x$ und $f''(x) = (x^2 + 5x - 7)e^x$.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f sowie deren Typ (lok. Max./lok. Min./Sattelpunkt).

Kritische Stelle	Typ
$x = -5$	lokales Maximum
$x = 2$	lokales Minimum

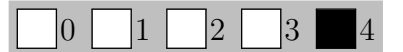
Aufgabe 4 (4 Punkte)



Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$\int 4e^x \sin(x) dx$	$\int \frac{2}{x(1 + \ln(x))} dx$	$\int_1^3 \frac{1}{x(1 + \ln(x))} dx$	$\int_0^{+\infty} \frac{2}{1 + x^2} dx$
$[2e^x(\sin(x) - \cos(x))]$	$[2 \ln(1 + \ln(x))]$	$\ln(1 + \ln(3))$	π

Aufgabe 5 (4 Punkte)



Gegeben sind die folgenden Abbildungen.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 4(y - z)^2 + x(y - z) \quad g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 25$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f . $\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ 8(y - z) + x \\ -8(y - z) - x \end{pmatrix}$

(b) Geben Sie die vier Gleichungen (in x, y, z und λ) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ beschreiben.

$$\begin{aligned} y - z + 2\lambda x &= 0 \\ 8(y - z) + x + 2\lambda y &= 0 \\ -8(y - z) - x + 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 25 &= 0 \end{aligned}$$

(c) Gegeben ist eine weitere Abbildung

$$h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 + 2yz.$$

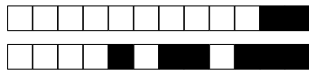
Wir betrachten die Abbildung f unter den Nebenbedingungen $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ und $h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$.

Die Anwendung der Multiplikatormethode nach Lagrange ergibt die folgenden kritischen Stellen als Kandidaten für Extremalstellen.

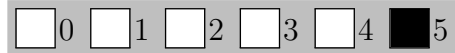
$$P_1 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)^T, P_2 = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)^T, P_3 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)^T, P_4 = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)^T$$

Bestimmen Sie den kleinsten Wert, den f unter den beiden Nebenbedingungen annimmt.

Kleinsten Wert : $25 \left(4 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



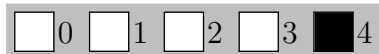
Aufgabe 2 (5 Punkte)



Berechnen Sie:

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{5^k}$	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(3x\pi)}{\cos(\frac{x\pi}{8})}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{x} + 2x^2 + 6x}{1 - 4\sqrt{x} + 7x^2}$	$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$
$\frac{5}{3}$	-24	$\frac{2}{7}$	$e^2 - 3$

Aufgabe 3 (4 Punkte)



Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (x^2 - x - 11)e^x$.

(a) Berechnen Sie $f'(x) = (x^2 + x - 12)e^x$ und $f''(x) = (x^2 + 3x - 11)e^x$.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f sowie deren Typ (lok. Max./lok. Min./Sattelpunkt).

Kritische Stelle	Typ
$x = -4$	lokales Maximum
$x = 3$	lokales Minimum

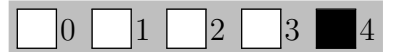
Aufgabe 4 (4 Punkte)



Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$\int \frac{-2}{x(1 + \ln(x))} dx$	$\int_1^4 \frac{1}{x(1 + \ln(x))} dx$	$\int 8e^x \sin(x) dx$	$\int_0^{+\infty} \frac{4}{1 + x^2} dx$
$[-2 \ln(1 + \ln(x))]$	$\ln(1 + \ln(4))$	$[4e^x(\sin(x) - \cos(x))]$	2π

Aufgabe 5 (4 Punkte)



Gegeben sind die folgenden Abbildungen.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 3(x-z)^2 + y(x-z) \quad g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 49$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f . $\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6(x-z) + y \\ x-z \\ -6(x-z) - y \end{pmatrix}$

(b) Geben Sie die vier Gleichungen (in x, y, z und λ) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ beschreiben.

$$\begin{aligned} 6(x-z) + y + 2\lambda x &= 0 \\ x-z + 2\lambda y &= 0 \\ -6(x-z) - y + 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 49 &= 0 \end{aligned}$$

(c) Gegeben ist eine weitere Abbildung

$$h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto y^2 + 2xz.$$

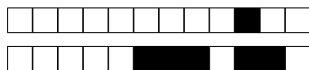
Wir betrachten die Abbildung f unter den Nebenbedingungen $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ und $h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$.

Die Anwendung der Multiplikatormethode nach Lagrange ergibt die folgenden kritischen Stellen als Kandidaten für Extremalstellen.

$$P_1 = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{2}\right)^T, P_2 = \left(\frac{7}{2}, -\frac{7}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{2}\right)^T, P_3 = \left(-\frac{7}{2}, \frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{7}{2}\right)^T, P_4 = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{7}{2}\right)^T$$

Bestimmen Sie den kleinsten Wert, den f unter den beiden Nebenbedingungen annimmt.

$$\text{Kleinsten Wert: } 49 \left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$



Aufgabe 6 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2e^{x-1} + \cos(\pi x) + 2$. Bestimmen Sie die Ableitungen:

$$f'(x) = \boxed{(2x^2 + 4x)e^{x-1} - \pi \sin(\pi x)} \quad f''(x) = \boxed{(2x^2 + 8x + 4)e^{x-1} - \pi^2 \cos(\pi x)}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$T_2(f, x, 1) = \boxed{3} + \boxed{6} \cdot (x - 1) + \boxed{\left(7 + \frac{\pi^2}{2}\right)} \cdot (x - 1)^2$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{k-1}}{5 \cdot 3^{k+1}} (z + 6i - 1)^k$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{(k+1)^2} (\sqrt{3}z + 2)^k$	$\sum_{k=2}^{\infty} ((2-i)z + 2)^k$
z_0	$-6i + 1$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{4 + 2i}{5}$
ρ	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$

Aufgabe 8 (3 Punkte)

0 1 2 3

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung für

$$\frac{x^2 + 9x + 10}{(x+3)^2(x+2)} = \frac{\boxed{5}}{x+3} + \frac{\boxed{8}}{(x+3)^2} + \frac{\boxed{-4}}{x+2}$$

1 2 3 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

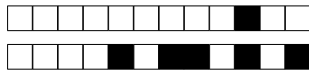
Matrikelnummer:

Gruppe:

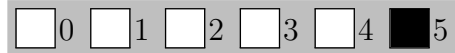
<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:



Aufgabe 2 (5 Punkte)



Berechnen Sie:

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x^3 - 8}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} + 4x + 6}{1 + 5x - 4x^{\frac{3}{2}}}$	$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{5^k}$
$\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$e^5 - 6$	$\frac{5}{2}$

Aufgabe 3 (4 Punkte)



Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (x^2 + 2x - 14)e^x$.

(a) Berechnen Sie $f'(x) = (x^2 + 4x - 12)e^x$ und $f''(x) = (x^2 + 6x - 8)e^x$.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f sowie deren Typ (lok. Max./lok. Min./Sattelpunkt).

Kritische Stelle	Typ
$x = -6$	lokales Maximum
$x = 2$	lokales Minimum

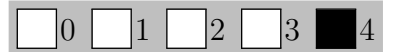
Aufgabe 4 (4 Punkte)



Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$\int 6e^x \sin(x) dx$	$\int \frac{3}{x(1 + \ln(x))} dx$	$\int_1^5 \frac{1}{x(1 + \ln(x))} dx$	$\int_0^{+\infty} \frac{8}{1 + x^2} dx$
$[3e^x(\sin(x) - \cos(x))]$	$[3 \ln(1 + \ln(x))]$	$\ln(1 + \ln(5))$	4π

Aufgabe 5 (4 Punkte)



Gegeben sind die folgenden Abbildungen.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 2(y - z)^2 + x(y - z) \quad g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 81$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f . $\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ 4(y - z) + x \\ -4(y - z) - x \end{pmatrix}$

(b) Geben Sie die vier Gleichungen (in x, y, z und λ) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ beschreiben.

$$\begin{aligned} y - z + 2\lambda x &= 0 \\ 4(y - z) + x + 2\lambda y &= 0 \\ -4(y - z) - x + 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 81 &= 0 \end{aligned}$$

(c) Gegeben ist eine weitere Abbildung

$$h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 + 2yz.$$

Wir betrachten die Abbildung f unter den Nebenbedingungen $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ und $h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$.

Die Anwendung der Multiplikatormethode nach Lagrange ergibt die folgenden kritischen Stellen als Kandidaten für Extremalstellen.

$$P_1 = \left(\frac{9}{\sqrt{2}}, \frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\right)^T, P_2 = \left(-\frac{9}{\sqrt{2}}, \frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\right)^T, P_3 = \left(\frac{9}{\sqrt{2}}, -\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)^T, P_4 = \left(-\frac{9}{\sqrt{2}}, -\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)^T$$

Bestimmen Sie den kleinsten Wert, den f unter den beiden Nebenbedingungen annimmt.

Kleinsten Wert : $81 \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$