



**Aufgabe 6** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Berechnen Sie:

|                                     |                                     |  |  |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--|--|
| $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7}{3^k}$ | $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{7}{3^k}$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + \sin(x) + 4x}{9x + 7 \ln(x)}$ | $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2k+1}$ |
| $\frac{21}{2}$                      | $\frac{7}{6}$                       | $\frac{4}{9}$  | $\frac{\pi}{6}$  |

**Aufgabe 7** (6 Punkte)

0  1  2  3  4  5  6

Gegeben ist der Quotient  $\frac{x^2 + 2x + 6}{x(x^2 + 1)}$ .

(a) Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{x(x^2 + 1)} = \frac{6}{x} + \frac{-5}{x^2 + 1} x + \frac{2}{x^2 + 1}$$

(b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x^2 + 2x + 6}{x(x^2 + 1)} dx = \left[ 6 \ln(|x|) - \frac{5 \ln(x^2 + 1)}{2} + 2 \arctan(x) \right]$$

**Aufgabe 8** (3 Punkte)

0  1  2  3

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)  $\int_0^1 (x^2 + 3) dx = \frac{10}{3}$

(b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) (\cos(x))^2 dx = \frac{1}{3}$

(c)  $\int_1^{+\infty} \frac{4}{x^3} dx = 2$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

1  2  3  4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

|                     |              |               |           |                         |           |                            |
|---------------------|--------------|---------------|-----------|-------------------------|-----------|----------------------------|
| $f(x)$              | $x^a$        | $e^x$         | $\sin x$  | $\tan x$                | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$  |
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $a x^{a-1}$  | $e^x$         | $\cos x$  | $\frac{1}{(\cos(x))^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ |
| $f(x)$              | $b^x$        | $\ln x $      | $\cos x$  | $\arctan x$             | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$  |
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $\ln(b) b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$       | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ |

|                 |                       |                       |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|
| $x$             | $\sin x$              | $\cos x$              |
| 0               | 0                     | 1                     |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$         | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$         |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1                     | 0                     |

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0  1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

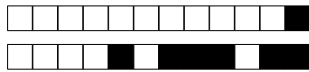
**Matrikelnummer:**

**Gruppe:**

|                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 |
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 |
| <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 |
| <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 |
| <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 |
| <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 |
| <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 |
| <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 |
| <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 |
| <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 |

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**



**Aufgabe 2** (4 Punkte)



Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (4-x)(y^2+x)$ .

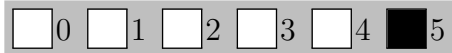
(a) Berechnen Sie  $\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - y^2 + 4 \\ -2xy + 8y \end{pmatrix}$

(b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix  $Hf \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2y \\ -2y & 8 - 2x \end{pmatrix}$

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von  $f$  und geben Sie jeweils deren Typ (lok. Max./lok. Min./Sattelpunkt) an.

Die einzige kritische Stelle ist  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  und es liegt hier ein Sattelpunkt vor.

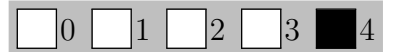
**Aufgabe 3** (5 Punkte)



Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  und den Konvergenzradius  $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ .

|        |  |   |   |
|--------|--|---|---|
|        | $\sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{2k-1}{k}\right)^k (3z+4)^k$ | $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^k}{k!} ((2-2i)z-4i)^k$ | $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{3^k} (z+\sqrt{2})^{2k}$ |
| $z_0$  | $-\frac{4}{3}$   | $i-1$   | $-\sqrt{2}$   |
| $\rho$ | $\frac{1}{6}$  | $+\infty$   | $\sqrt{3}$  |

**Aufgabe 4** (4 Punkte)



Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sqrt{2x^2+1}$$

Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von  $f$ .

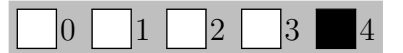
$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(2x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Stellen Sie das Taylorpolynom  $T_2(f, x, 2)$  der Stufe 2 um den Entwicklungspunkt 2 auf.

$$T_2(f, x, 2) = 3 + \frac{4}{3}(x-2) + \frac{1}{27}(x-2)^2$$

**Aufgabe 5** (4 Punkte)



Gegeben ist das folgende von einem Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}$  abhängige Vektorfeld.

$$g_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1^2 + \alpha e^{(\alpha x_2)} - 4x_1x_2 \\ -2x_1^2 + e^{(\alpha x_2)}(2x_2 + 3\alpha x_1) \end{pmatrix}$$

(a) Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  besitzt  $g_\alpha$  ein Potential?

$$\alpha \in \{0, 3\}$$

(b) Bestimmen Sie ein Potential  $U$  für das Vektorfeld  $g_0$ .

$$U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}x_1^3 - 2x_1^2x_2 + x_2^2$$

(c) Sei  $C: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ 2t \end{pmatrix}$  eine Parametrisierung einer Kurve  $K$ .

Berechnen Sie  $C(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $C(2) = \begin{pmatrix} e^2 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie das folgende Kurvenintegral.

$$\int_K g_0(x) \cdot dx = \frac{2}{3}e^6 - 8e^4 + \frac{46}{3}$$