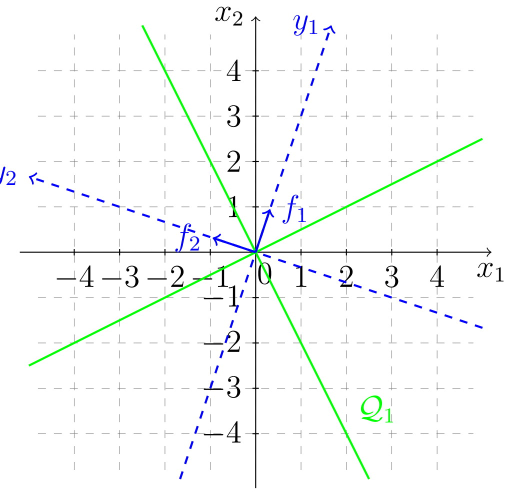
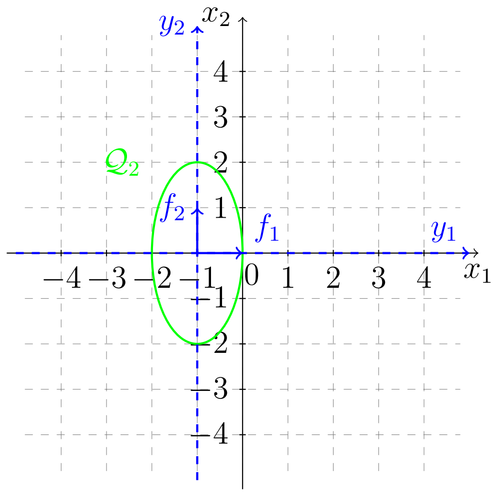
## Aufgabe 7 (9 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Bestimmen Sie für die folgenden Quadriken jeweils ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem diese Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie jeweils die Gleichung der Quadrik in diesem Koordinatensystem an. Skizzieren Sie das neue Koordinatensystem samt der Quadrik jeweils im Standardkoordinatensystem.

| $\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -4x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_1x_2 = 0 \right\}$ | |
|---|---|
| $\mathbb{F}$ | $\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ |
| euklidische Normalform | $5y_1^2 - 5y_2^2 = 0$ |
| Skizze |   |

| $\mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x_1^2 + x_2^2 + 8x_1 = 0 \right\}$ | |
|---|---|
| $\mathbb{F}$ | $\left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ |
| euklidische Normalform | $-y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 + 1 = 0$ |
| Skizze |   |





Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

*Viel Erfolg!*

## Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Matrikelnummer:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |

**Gruppe:**

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |
| 5 | 5 |
| 6 | 6 |
| 7 | 7 |
| 8 | 8 |
| 9 | 9 |

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**

**Umfrage des MINT-Kollegs:**

Haben Sie das Angebot des „Offenen Lernraums“ genutzt? Ja Nein

**Aufgabe 2** (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

**(a)** Berechnen Sie das charakteristische Polynom von $A$.

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 + 3\lambda + 2}$$

**(b)** Geben Sie alle Eigenwerte von $A$ und zu jedem Eigenwert $\lambda$ dessen algebraische Vielfachheit $e_\lambda$ an.

$$\lambda_1 = 2,\ e_{\lambda_1} = 1, \quad \lambda_2 = -1,\ e_{\lambda_2} = 2$$

**(c)** Geben Sie zu jedem Eigenwert von $A$ den zugehörigen Eigenraum an.

$$V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V(-1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

**Aufgabe 3** (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben seien $A := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$$\det(AB) = \boxed{-18}, \quad \det(B^\intercal B) = \boxed{81}, \quad \det(A+B) = \boxed{15}.$$

**Aufgabe 4** (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Sei $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

**(a)** Berechnen Sie die Spur $\operatorname{Sp} A = \boxed{14}$

**(b)** Geben Sie alle Eigenwerte von $A$ an.

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 11$$

**Aufgabe 5** (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Sei $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2, e_3)$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^3$, und $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

**(a)** Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**(b)** Sei $P$ der Punkt mit Standardkoordinaten ${}_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und den Koordinatenvektor ${}_{\mathbb{F}}P$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad {}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 6** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Wir betrachten die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $c = 3$.

**(a)** Bestimmen Sie $\operatorname{Rg} A = \boxed{1}$.

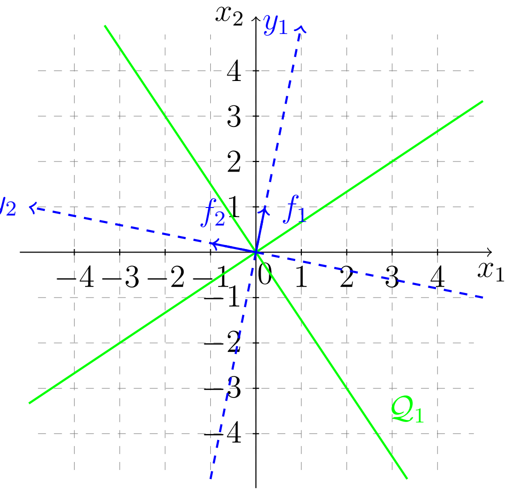
**(b)** Bestimmen Sie $A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ und $\operatorname{Rg} A_{\text{erw}} = \boxed{2}$.

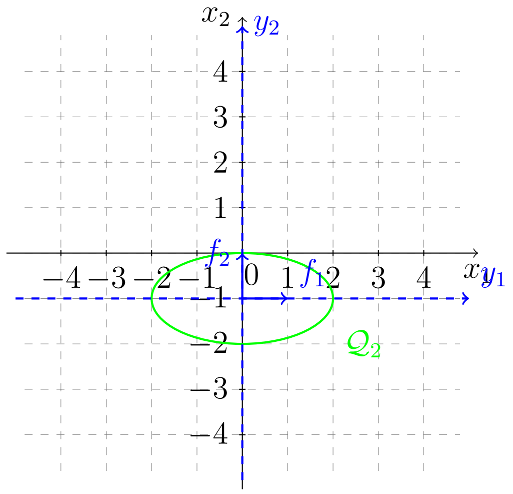
**(c)** Welchen Typ hat die Quadrik $Q$?

☐ kegelige Quadrik ☒ Mittelpunktsquadrik ☐ parabolische Quadrik

**Aufgabe 7** (9 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ■9

Bestimmen Sie für die folgenden Quadriken jeweils ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem diese Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie jeweils die Gleichung der Quadrik in diesem Koordinatensystem an. Skizzieren Sie das neue Koordinatensystem samt der Quadrik jeweils im Standardkoordinatensystem.

| $\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -12x_1^2 + 12x_2^2 + 10x_1x_2 = 0 \right\}$ | |
|---|---|
| $\mathbb{F}$ | $\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ |
| euklidische Normalform | $13y_1^2 - 13y_2^2 = 0$ |
| Skizze |  |

| $\mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_2 = 0 \right\}$ | |
|---|---|
| $\mathbb{F}$ | $\left( \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ |
| euklidische Normalform | $-\frac{1}{4}y_1^2 - y_2^2 + 1 = 0$ |
| Skizze |  |

+2/1/58+



☐1 ■2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Feldern ein.

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**

**Matrikelnummer:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 |
| ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 |
| ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 |
| ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 |
| ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 |
| ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 |
| ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 |
| ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 |
| ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 |
| ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 |

**Gruppe:**

| | |
|---|---|
| ☐0 | ☐0 |
| ☐1 | ☐1 |
| ☐2 | ☐2 |
| ☐3 | ☐3 |
| ☐4 | ☐4 |
| ☐5 | ☐5 |
| ☐6 | ☐6 |
| ☐7 | ☐7 |
| ☐8 | ☐8 |
| ☐9 | ☐9 |

**Umfrage des MINT-Kollegs:**

Haben Sie das Angebot des „Offenen Lernraums“ genutzt? Ja ■ Nein ■

**Aufgabe 2** (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**(a)** Berechnen Sie das charakteristische Polynom von $A$.

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4}$$

**(b)** Geben Sie alle Eigenwerte von $A$ und zu jedem Eigenwert $\lambda$ dessen algebraische Vielfachheit $e_\lambda$ an.

$$\lambda_1 = 2,\ e_{\lambda_1} = 2, \quad \lambda_2 = 1,\ e_{\lambda_2} = 1$$

**(c)** Geben Sie zu jedem Eigenwert von $A$ den zugehörigen Eigenraum an.

$$V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

**Aufgabe 3** (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$$\det(AB) = \boxed{-32}, \quad \det(B^\intercal B) = \boxed{64}, \quad \det(A+B) = \boxed{11}.$$

**Aufgabe 4** (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Sei $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

**(a)** Berechnen Sie die Spur $\operatorname{Sp} A = \boxed{13}$

**(b)** Geben Sie alle Eigenwerte von $A$ an.

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 12$$

**Aufgabe 5** (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Sei $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2, e_3)$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^3$, und $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

**(a)** Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

**(b)** Sei $P$ der Punkt mit Standardkoordinaten ${}_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und den Koordinatenvektor ${}_{\mathbb{F}}P$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5} \\ -1 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{F}}P = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{2}{5} \\ -2 \end{pmatrix}}$$

**Aufgabe 6** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Wir betrachten die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$$

mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $c = 5$.

**(a)** Bestimmen Sie $\operatorname{Rg} A = \boxed{2}$.

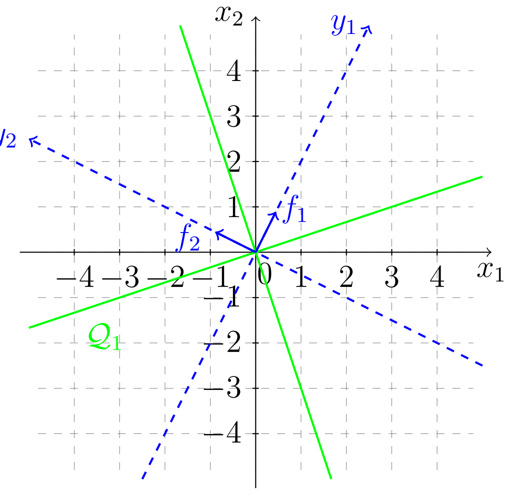
**(b)** Bestimmen Sie $A_{\text{erw}} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}}$ und $\operatorname{Rg} A_{\text{erw}} = \boxed{2}$.

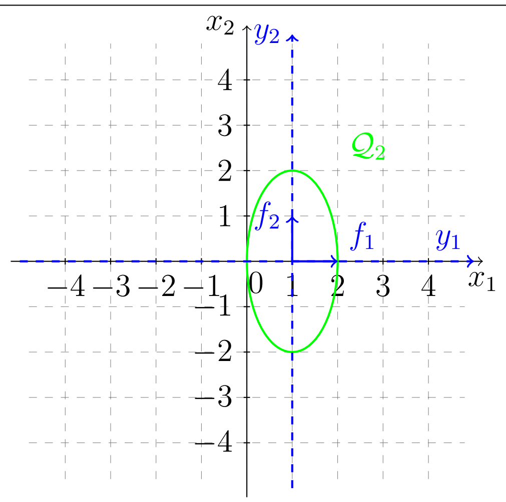
**(c)** Welchen Typ hat die Quadrik $Q$?

☒ kegelige Quadrik ☐ Mittelpunktsquadrik ☐ parabolische Quadrik

**Aufgabe 7** (9 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ■9

Bestimmen Sie für die folgenden Quadriken jeweils ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem diese Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie jeweils die Gleichung der Quadrik in diesem Koordinatensystem an. Skizzieren Sie das neue Koordinatensystem samt der Quadrik jeweils im Standardkoordinatensystem.

| $\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -3x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_1x_2 = 0 \right\}$ | |
|---|---|
| $\mathbb{F}$ | $\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ |
| euklidische Normalform | $5y_1^2 - 5y_2^2 = 0$ |
| Skizze |   |

| $\mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 = 0 \right\}$ | |
|---|---|
| $\mathbb{F}$ | $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ |
| euklidische Normalform | $-y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 + 1 = 0$ |
| Skizze |   |





Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ■3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**

**Matrikelnummer:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 |
| ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 |
| ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 |
| ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 |
| ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 |
| ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 |
| ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 |
| ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 |
| ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 |
| ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 |

**Gruppe:**

| | |
|---|---|
| ☐0 | ☐0 |
| ☐1 | ☐1 |
| ☐2 | ☐2 |
| ☐3 | ☐3 |
| ☐4 | ☐4 |
| ☐5 | ☐5 |
| ☐6 | ☐6 |
| ☐7 | ☐7 |
| ☐8 | ☐8 |
| ☐9 | ☐9 |

**Umfrage des MINT-Kollegs:**

Haben Sie das Angebot des „Offenen Lernraums“ genutzt? Ja ■ Nein ■

**Aufgabe 2** (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

**(a)** Berechnen Sie das charakteristische Polynom von $A$.

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3}$$

**(b)** Geben Sie alle Eigenwerte von $A$ und zu jedem Eigenwert $\lambda$ dessen algebraische Vielfachheit $e_\lambda$ an.

$$\boxed{\lambda_1 = 3,\ e_{\lambda_1} = 1, \quad \lambda_2 = -1,\ e_{\lambda_2} = 2}$$

**(c)** Geben Sie zu jedem Eigenwert von $A$ den zugehörigen Eigenraum an.

$$\boxed{V(3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \quad V(-1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$

---

**Aufgabe 3** (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben seien $A := \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$\det(AB) = \boxed{24}$, $\det(B^\intercal B) = \boxed{36}$, $\det(A+B) = \boxed{13}$.

---

**Aufgabe 4** (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Sei $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$.

**(a)** Berechnen Sie die Spur $\operatorname{Sp} A = \boxed{17}$

**(b)** Geben Sie alle Eigenwerte von $A$ an.

$$\boxed{\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 13}$$

---

**Aufgabe 5** (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Sei $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2, e_3)$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^3$, und $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

**(a)** Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

**(b)** Sei $P$ der Punkt mit Standardkoordinaten ${}_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und den Koordinatenvektor ${}_{\mathbb{F}}P$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{F}}P = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{4}{3} \\ 4 \end{pmatrix}}$$

---

**Aufgabe 6** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Wir betrachten die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal A\, x + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$$

mit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $c = 1$.

**(a)** Bestimmen Sie $\operatorname{Rg} A = \boxed{2}$.

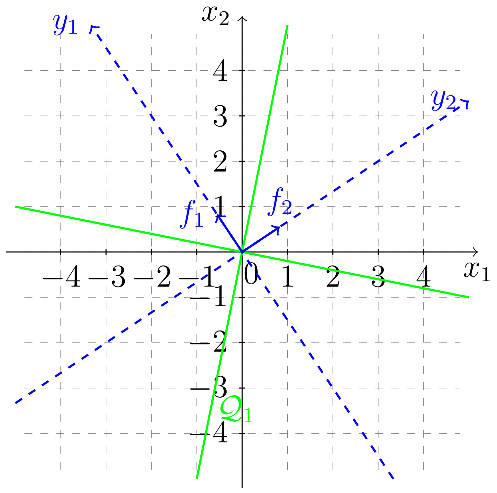
**(b)** Bestimmen Sie $A_{\text{erw}} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$ und $\operatorname{Rg} A_{\text{erw}} = \boxed{3}$.

**(c)** Welchen Typ hat die Quadrik $Q$?

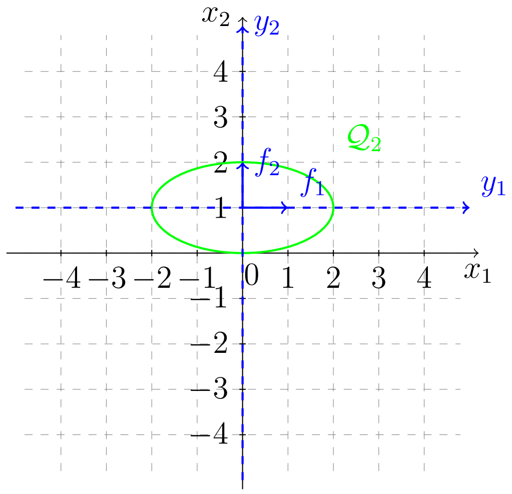
☐ kegelige Quadrik ☒ Mittelpunktsquadrik ☐ parabolische Quadrik

**Aufgabe 7** (9 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Bestimmen Sie für die folgenden Quadriken jeweils ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem diese Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie jeweils die Gleichung der Quadrik in diesem Koordinatensystem an. Skizzieren Sie das neue Koordinatensystem samt der Quadrik jeweils im Standardkoordinatensystem.

| | |
|---|---|
| $\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -5x_1^2 + 5x_2^2 - 24x_1x_2 = 0 \right\}$ | |
| $\mathbb{F}$ | $\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ |
| euklidische Normalform | $13y_1^2 - 13y_2^2 = 0$ |
| Skizze |  |



| | |
|---|---|
| $\mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_2 = 0 \right\}$ | |
| $\mathbb{F}$ | $\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ |
| euklidische Normalform | $-\frac{1}{4}y_1^2 - y_2^2 + 1 = 0$ |
| Skizze |  |





**Scheinklausur** **Höhere Mathematik 1** **1. 2. 2020**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** 1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt) 0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**

**Matrikelnummer:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |

**Gruppe:**

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |
| 5 | 5 |
| 6 | 6 |
| 7 | 7 |
| 8 | 8 |
| 9 | 9 |

**Umfrage des MINT-Kollegs:**

Haben Sie das Angebot des „Offenen Lernraums" genutzt? Ja Nein

**Aufgabe 2** (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 10 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

**(a)** Berechnen Sie das charakteristische Polynom von $A$.

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 + 3\lambda - 2}$$

**(b)** Geben Sie alle Eigenwerte von $A$ und zu jedem Eigenwert $\lambda$ dessen algebraische Vielfachheit $e_\lambda$ an.

$$\lambda_1 = -2,\ e_{\lambda_1} = 1, \quad \lambda_2 = 1,\ e_{\lambda_2} = 2$$

**(c)** Geben Sie zu jedem Eigenwert von $A$ den zugehörigen Eigenraum an.

$$V(-2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right), \quad V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

**Aufgabe 3** (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben seien $A := \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$$\det(AB) = \boxed{-12}, \quad \det(B^\intercal B) = \boxed{36}, \quad \det(A+B) = \boxed{4}.$$

**Aufgabe 4** (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Sei $A = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{11}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$.

**(a)** Berechnen Sie die Spur $\operatorname{Sp} A = \boxed{19}$

**(b)** Geben Sie alle Eigenwerte von $A$ an.

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 14$$

**Aufgabe 5** (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Sei $\mathbb{E} = (0; \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^3$, und $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$.

**(a)** Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

**(b)** Sei $P$ der Punkt mit Standardkoordinaten ${}_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und den Koordinatenvektor ${}_{\mathbb{F}}P$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{F}}P = \boxed{\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}}$$

**Aufgabe 6** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Wir betrachten die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $c = 1$.

**(a)** Bestimmen Sie $\operatorname{Rg} A = \boxed{1}$.

**(b)** Bestimmen Sie $A_{\text{erw}} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}}$ und $\operatorname{Rg} A_{\text{erw}} = \boxed{3}$.

**(c)** Welchen Typ hat die Quadrik $Q$?

☐ kegelige Quadrik ☐ Mittelpunktsquadrik ☒ parabolische Quadrik