



Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

1  2  3  4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0  1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

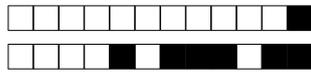
<b>Name, Vorname:</b>
<b>Matrikelnummer:</b>

**Matrikelnummer:**

<input type="checkbox"/> 0						
<input type="checkbox"/> 1						
<input type="checkbox"/> 2						
<input type="checkbox"/> 3						
<input type="checkbox"/> 4						
<input type="checkbox"/> 5						
<input type="checkbox"/> 6						
<input type="checkbox"/> 7						
<input type="checkbox"/> 8						
<input type="checkbox"/> 9						

**Gruppe:**

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

Für  $x, y \in \mathbb{R}$  ist die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ y & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y & x \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie  $\det(A)$  in Abhängigkeit von  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

$$\det(A) = \boxed{x^6 - y^6}$$

(b) Für welche Paare  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ist  $A$  regulär?

$$\boxed{\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \neq y \wedge x \neq -y\}}$$

**Aufgabe 3** (5 Punkte)

Gegeben ist die Matrix  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte von  $B$ .

$$\chi_B(\lambda) = \boxed{-(\lambda + 2)^3}$$

$$\text{Eigenwerte: } \boxed{\lambda = -2}$$

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert  $\mu$  von  $B$  den Eigenraum  $V(\mu)$ .

$$V(-2) = \text{L} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

(c) Ist  $B$  diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

nein, da es maximal zwei linear unabhängige Eigenvektoren von  $B$  gibt,  
d.h.  $\mathbb{C}^3$  hat keine Basis aus Eigenvektoren.


 0  1  2  3  4
**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Sei  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  mit charakteristischem Polynom  $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$ .

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A$ .

Eigenwerte :  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$

(b) Bestimmen Sie die Determinante und die Spur von  $A$ .

$\det(A) = 0$        $\text{Sp}(A) = 2$

(c) Geben Sie explizit zwei Matrizen  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  mit  $\chi_{A_1}(\lambda) = \chi_{A_2}(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$  so an, dass  $A_1$  nicht konjugiert zu  $A_2$  ist.

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$        $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 5** (3 Punkte)
 0  1  2  3

Gegeben ist der Unterraum  $V = L(h_1, h_2)$  von  $\mathbb{R}^4$  mit  $h_1 = (1, 2, 2, -1)^T$  und  $h_2 = (1, 1, -5, 3)^T$ . Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis  $F: f_1, f_2$  von  $V$  so, dass  $L(h_1) = L(f_1)$ .

$f_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$        $f_2 = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

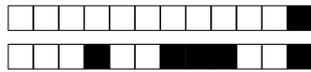
**Aufgabe 6** (4 Punkte)
 0  1  2  3  4

Gegeben ist das Standardkoordinatensystem  $\mathbb{E}$  des  $\mathbb{R}^2$  sowie die affinen Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathbb{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Es sei  $P$  der Punkt mit  ${}_{\mathbb{F}}P = (-1, 1)^T$  und  $Q$  der Punkt mit  ${}_{\mathbb{E}}Q = (3, 2)^T$ . Bestimmen Sie die Koordinatentupel  ${}_{\mathbb{E}}P, {}_{\mathbb{F}}Q$  und die Koordinatentransformation  ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$ .

${}_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$        ${}_{\mathbb{F}}Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$        ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}: {}_{\mathbb{F}}X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 7** (7 Punkte)

Wir betrachten die Quadrik  $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 5x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2 + 4x_1 - 4x_2 - 4 = 0 \right\}$ .

- (a) Geben Sie eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , einen Vektor  $a \in \mathbb{R}^2$  und ein  $c \in \mathbb{R}$  so an, dass gilt  $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x^T A x + 2a^T x + c = 0 \right\}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad c = -4$$

- (b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix  $D$  und eine orthogonale Matrix  $F$  so, dass  $D = F^T A F$ .

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (c) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von  $Q$ .

$$-z_1^2 - \frac{1}{4}z_2^2 + 1 = 0$$

**Aufgabe 8** (3 Punkte)

Für  $s \in \mathbb{R}$  betrachten wir die Quadrik  $Q_s = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x^T A_s x + 2a_s^T x = 0 \right\}$  mit

$$A_s = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von  $s$  den Rang von  $A_s$  und die erweiterte Matrix  $(A_s)_{\text{erw}}$ .

$$\text{Rg}(A_s) = \begin{cases} 3, & s \neq 1 \\ 2, & s = 1 \end{cases} \quad (A_s)_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ s & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (b) Bestimmen Sie für  $s = 1$  den Typ der Quadrik im Sinne der Grobeinteilung aus der Vorlesung.

Mittelpunktsquadrik