Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **6. 2. 2021**

☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Feldern ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ y & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y & x \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$ in Abhängigkeit von $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$\det(A) = \boxed{x^6 - y^6}$$

(b) Für welche Paare $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist A regulär?

$$\boxed{\left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq y \wedge x \neq -y\right\}}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

Gegeben ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte von B.

$$\chi_B(\lambda) = \boxed{-(\lambda + 2)^3}$$

$$\text{Eigenwerte}: \boxed{\lambda = -2}$$

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert μ von B den Eigenraum $V(\mu)$.

$$\boxed{V(-2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$

(c) Ist B diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

nein, da es maximal zwei linear unabhängige Eigenvektoren von B gibt,
d.h. $\mathbb{C}^3$ hat keine Basis aus Eigenvektoren.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

$\square 0 \quad \square 1 \quad \square 2 \quad \square 3 \quad \blacksquare 4$

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

Eigenwerte : $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1$

(b) Bestimmen Sie die Determinante und die Spur von A.

$\det(A) = 0$ $\qquad$ $\mathrm{Sp}(A) = 2$

(c) Geben Sie explizit zwei Matrizen $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\chi_{A_1}(\lambda) = \chi_{A_2}(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$ so an, dass A_1 nicht konjugiert zu A_2 ist.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)

$\square 0 \quad \square 1 \quad \square 2 \quad \blacksquare 3$

Gegeben ist der Unterraum $V = \mathrm{L}(h_1, h_2)$ von $\mathbb{R}^4$ mit $h_1 = (1,2,2,-1)^\mathsf{T}$ und $h_2 = (1,1,-5,3)^\mathsf{T}$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2$ von V so, dass $\mathrm{L}(h_1) = \mathrm{L}(f_1)$.

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

$\square 0 \quad \square 1 \quad \square 2 \quad \square 3 \quad \blacksquare 4$

Gegeben ist das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ des $\mathbb{R}^2$ sowie die affinen Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathbb{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Es sei P der Punkt mit ${}_\mathbb{F}P = (-1,1)^\mathsf{T}$ und Q der Punkt mit ${}_\mathbb{E}Q = (3,2)^\mathsf{T}$. Bestimmen Sie die Koordinatentupel ${}_\mathbb{E}P$, ${}_\mathbb{F}Q$ und die Koordinatentransformation ${}_\mathbb{G}\kappa_\mathbb{F}$.

$${}_\mathbb{E}P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad {}_\mathbb{F}Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad {}_\mathbb{G}\kappa_\mathbb{F} \colon {}_\mathbb{F}X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} {}_\mathbb{F}X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 (7 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Wir betrachten die Quadrik $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 5x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2 + 4x_1 - 4x_2 - 4 = 0 \right\}$.

(a) Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, einen Vektor $a \in \mathbb{R}^2$ und ein $c \in \mathbb{R}$ so an, dass gilt $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad c = -4$$

(b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix F so, dass $D = F^\intercal AF$.

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q.

$$-z_1^2 - \frac{1}{4}z_2^2 + 1 = 0$$

Aufgabe 8 (3 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ■3

Für $s \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Quadrik $Q_s = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^\intercal A_s x + 2a_s^\intercal x = 0 \right\}$ mit

$$A_s = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad a_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von s den Rang von A_s und die erweiterte Matrix $(A_s)_{\text{erw}}$.

$$\operatorname{Rg}(A_s) = \begin{cases} 3\,, & s \neq 1 \\ 2\,, & s = 1 \end{cases} \qquad (A_s)_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ s & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie für $s = 1$ den Typ der Quadrik im Sinne der Grobeinteilung aus der Vorlesung.

Mittelpunktsquadrik
