Aufgabe 8 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben sei die Ebene $E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 4x_2 + 1 = 0\}$ sowie die von einem Parameter $\delta \in \mathbb{R}$ abhängige Gerade $g_\delta := \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \delta \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E: $\left\langle \boxed{} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \boxed{}$.

(b) Für welchen Wert für δ ist g_δ parallel zu E? $\delta = \boxed{}$

Bestimmen Sie in diesem Fall ferner den Abstand a der Geraden g_δ und E: $a = \boxed{}$

(c) Sei nun $\delta = 3$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S_3 von E und g_3 sowie den zugehörigen Parameter λ: $S_3 = \boxed{}$ $\lambda = \boxed{}$

Aufgabe 9 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Sei $B\colon b_1, b_2$ die Basis von $\mathbb{R}^2$ bestehend aus $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -35 \end{pmatrix}$.

Der Vektor v sei bezüglich der Standardbasis $E\colon$ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben durch ${}_E v = \begin{pmatrix} 2 \\ 25 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie:

${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{}$ ${}_B\mathrm{id}_E = \boxed{}$ ${}_B v = \boxed{}$

☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Bestimmen Sie jeweils alle Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass

(a) $u_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonal sind: $\alpha = \boxed{}$

(b) $|\, u_\alpha \,|^2 - \frac{7}{2}\alpha - 2 = 0$ gilt: $\alpha \in \left\{ \boxed{} \right\}$

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(a) Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$\frac{(2-\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^2} = \boxed{}$$

(b) Sei nun $z = \dfrac{4}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}$. Bestimmen Sie den Betrag $|z|$ sowie das Argument $\theta \in [0, 2\pi)$:

$|z| = \boxed{}$ $\theta = \boxed{}$

Aufgabe 4 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sei die Matrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1+3\alpha & 1 & 1-3\alpha \\ -1 & 3-3\alpha & 9\alpha^2+1 & -2+3\alpha \\ 1 & -1+3\alpha & 3\alpha & 3-9\alpha \end{pmatrix}$

(a) Sei zunächst $\alpha := 0$ sowie $b := (1,2,3)^\intercal$. Bestimmen sie die Lösungmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems $A_0 x = b$:

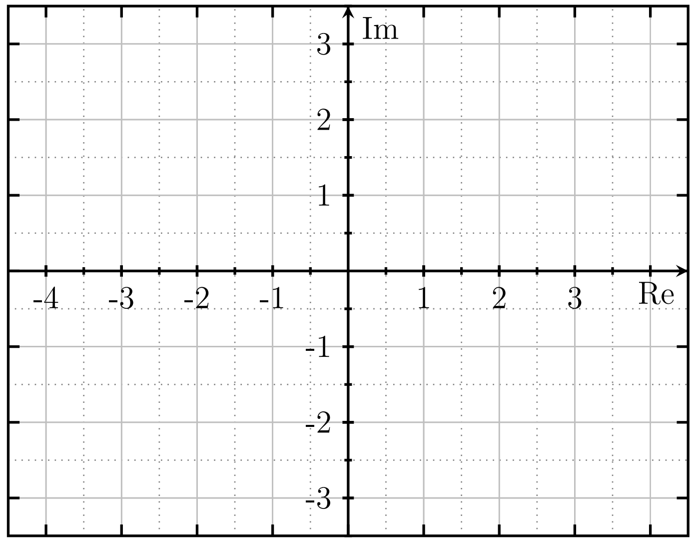
$\mathcal{L} = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie alle Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Matrix A_α Rang 3 hat. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \boxed{} \right\}$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(a) Sei $w = -2 + 3\mathrm{i}$. Skizzieren Sie die Menge $H := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}(z\bar{w}) \geqq 6 \right\}$.

(b) Für $z \in \mathbb{C}$ sei nun $d(z) := |z - 2 + \mathrm{i}|$ der Abstand von z zu $2 - \mathrm{i}$.
Ergänzen Sie die Skizze um die Menge $M := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, (d(z))^2 - \frac{3}{2}d(z) + \frac{1}{2} = 0 \right\}$:



Aufgabe 6 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie: $A^{-1} = \boxed{}$

Aufgabe 7 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben sei die Matrix $D = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie: $\det(D) = \boxed{}$

$D^2 = \boxed{}$ und $DD^\intercal = \boxed{}$.

Aufgabe 8 (6 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6

Gegeben sei die Ebene $E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -3x_2 + 4x_3 + 2 = 0\}$ sowie die von einem Parameter $\delta \in \mathbb{R}$ abhängige Gerade $g_\delta := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \delta \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E: $\left\langle \boxed{} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \boxed{}$.

(b) Für welchen Wert für δ ist g_δ parallel zu E? $\delta = \boxed{}$

Bestimmen Sie in diesem Fall ferner den Abstand a der Geraden g_δ und E: $a = \boxed{}$

(c) Sei nun $\delta = 4$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S_4 von E und g_4 sowie den zugehörigen Parameter λ: $S_4 = \boxed{}$ $\lambda = \boxed{}$

Aufgabe 9 (3 Punkte) 0 1 2 3

Sei $B\colon\ b_1, b_2$ die Basis von $\mathbb{R}^2$ bestehend aus $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -43 \end{pmatrix}$.

Der Vektor v sei bezüglich der Standardbasis $E\colon\ \mathrm{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben durch ${}_E v = \begin{pmatrix} -2 \\ 21 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie:

${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{}$ ${}_B\mathrm{id}_E = \boxed{}$ ${}_B v = \boxed{}$

---

1 2 3 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) 0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9

Gruppe:

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Aufgabe 2 (3 Punkte) □0 □1 □2 □3

Bestimmen Sie jeweils alle Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass

(a) $u_\alpha = \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonal sind: $\alpha = \boxed{}$

(b) $|\, u_\alpha \,|^2 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{15}{2} = 0$ gilt: $\alpha \in \left\{ \boxed{} \right\}$

Aufgabe 3 (4 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4

(a) Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$\frac{(2-\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^2} = \boxed{}$$

(b) Sei nun $z = \frac{2}{1+\mathrm{i}}$. Bestimmen Sie den Betrag $|z|$ sowie das Argument $\theta \in [0, 2\pi)$:

$$|z| = \boxed{} \qquad \theta = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4

Gegeben sei die Matrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1-4\alpha & 1-4\alpha & 1 \\ -1 & -3+4\alpha & -2+4\alpha & 16\alpha^2+1 \\ 1 & 1-4\alpha & 3-12\alpha & 4\alpha \end{pmatrix}$

(a) Sei zunächst $\alpha := 0$ sowie $b := (2, 1, 3)^\intercal$. Bestimmen sie die Lösungmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems $A_0 x = b$:

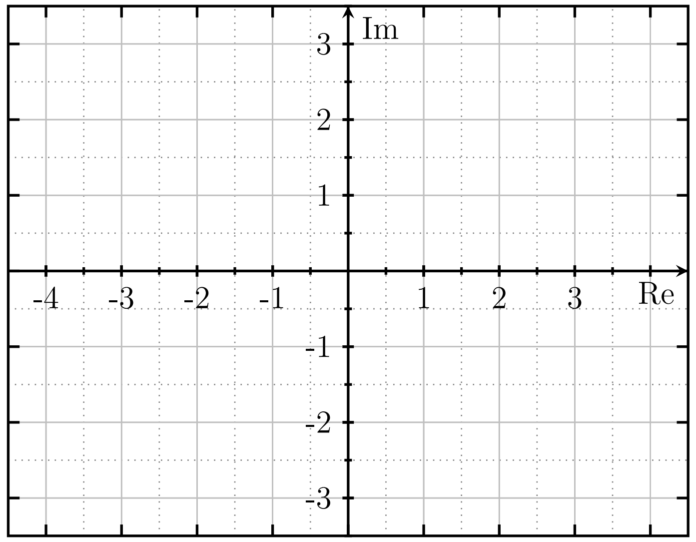
$$\mathcal{L} = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie alle Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Matrix A_α Rang 3 hat. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \boxed{} \right\}$

Aufgabe 5 (4 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4

(a) Sei $w = 2 - \mathrm{i}$. Skizzieren Sie die Menge $H := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im}(z\bar{w}) \geqq 4 \right\}$.

(b) Für $z \in \mathbb{C}$ sei nun $d(z) := |z + 1 + \mathrm{i}|$ der Abstand von z zu $-1 - \mathrm{i}$.
Ergänzen Sie die Skizze um die Menge $M := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, (d(z))^2 - \frac{5}{2}d(z) + \frac{3}{2} = 0 \right\}$:



Aufgabe 6 (3 Punkte) □0 □1 □2 □3

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie: $A^{-1} = \boxed{}$

Aufgabe 7 (3 Punkte) □0 □1 □2 □3

Gegeben sei die Matrix $D = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie: $\det(D) = \boxed{}$

$$D^2 = \boxed{} \quad \text{und} \quad DD^\intercal = \boxed{}.$$

Aufgabe 8 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben sei die Ebene $E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 - 3x_3 + 3 = 0\}$ sowie die von einem Parameter $\delta \in \mathbb{R}$ abhängige Gerade $g_\delta := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \delta \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E: $\left\langle \boxed{} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \boxed{}$.

(b) Für welchen Wert für δ ist g_δ parallel zu E? $\delta = \boxed{}$

Bestimmen Sie in diesem Fall ferner den Abstand a der Geraden g_δ und E: $a = \boxed{}$

(c) Sei nun $\delta = 1$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S_1 von E und g_1 sowie den zugehörigen Parameter λ: $S_1 = \boxed{}$ $\lambda = \boxed{}$

Aufgabe 9 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Sei $B\colon\ b_1, b_2$ die Basis von $\mathbb{R}^2$ bestehend aus $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -41 \end{pmatrix}$.

Der Vektor v sei bezüglich der Standardbasis $E\colon\ \mathrm{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben durch ${}_E v = \begin{pmatrix} 2 \\ 26 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie:

${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{}$ ${}_B\mathrm{id}_E = \boxed{}$ ${}_B v = \boxed{}$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **17. 12. 2022**

☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Bestimmen Sie jeweils alle Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass

(a) $u_\alpha = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonal sind: $\alpha = \boxed{\quad}$

(b) $|\, u_\alpha \,|^2 - 8\alpha - 1 = 0$ gilt: $\alpha \in \left\{ \boxed{\quad} \right\}$

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(a) Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$\frac{(2+\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^2} = \boxed{\quad}$$

(b) Sei nun $z = \dfrac{4}{\sqrt{3} - \mathrm{i}}$. Bestimmen Sie den Betrag $|z|$ sowie das Argument $\theta \in [0, 2\pi)$:

$|z| = \boxed{\quad}$ $\theta = \boxed{\quad}$

Aufgabe 4 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sei die Matrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1+2\alpha & -1 & 1+2\alpha \\ -1 & -3-2\alpha & -4\alpha^2-1 & -2-2\alpha \\ 1 & 1+2\alpha & 2\alpha & 3+6\alpha \end{pmatrix}$

(a) Sei zunächst $\alpha := 0$ sowie $b := (-2, 1, 3)^\intercal$. Bestimmen sie die Lösungmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems $A_0 x = b$:

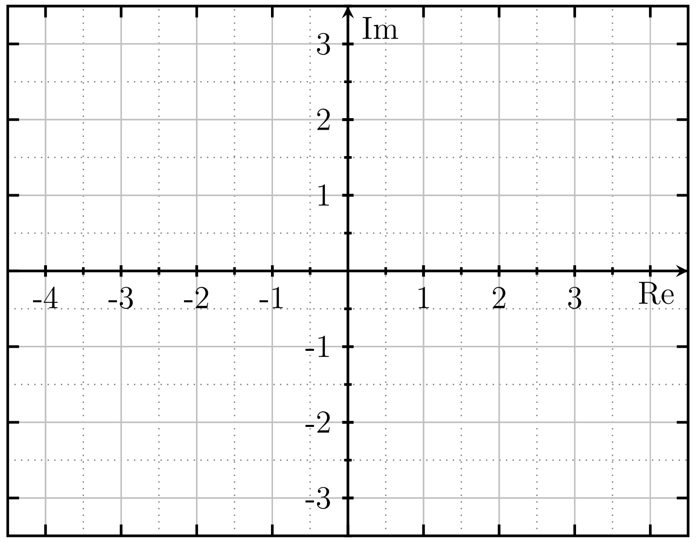
$\mathcal{L} = \boxed{\quad}$

(b) Bestimmen Sie alle Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Matrix A_α Rang 3 hat. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \boxed{\quad} \right\}$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(a) Sei $w = 3 - 2\mathrm{i}$. Skizzieren Sie die Menge $H := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}(z\overline{w}) \geqq 6 \right\}$.

(b) Für $z \in \mathbb{C}$ sei nun $d(z) := |z + 2 - \mathrm{i}|$ der Abstand von z zu $-2 + \mathrm{i}$.
Ergänzen Sie die Skizze um die Menge $M := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, (d(z))^2 - \frac{5}{2} d(z) + 1 = 0 \right\}$:



Aufgabe 6 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie: $A^{-1} = \boxed{\quad}$

Aufgabe 7 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben sei die Matrix $D = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie: $\det(D) = \boxed{\quad}$

$D^2 = \boxed{\quad}$ und $DD^\intercal = \boxed{\quad}$.

Aufgabe 8 (6 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6

Gegeben sei die Ebene $E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -4x_1 + 3x_2 + 4 = 0\}$ sowie die von einem Parameter $\delta \in \mathbb{R}$ abhängige Gerade $g_\delta := \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ \delta \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E: $\left\langle \square \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \square$.

(b) Für welchen Wert für δ ist g_δ parallel zu E? $\delta = \square$

Bestimmen Sie in diesem Fall ferner den Abstand a der Geraden g_δ und E: $a = \square$

(c) Sei nun $\delta = -4$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S_{-4} von E und g_{-4} sowie den zugehörigen Parameter λ: $S_{-4} = \square$ $\lambda = \square$

Aufgabe 9 (3 Punkte) 0 1 2 3

Sei $B\colon\ b_1, b_2$ die Basis von $\mathbb{R}^2$ bestehend aus $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -17 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -33 \end{pmatrix}$.

Der Vektor v sei bezüglich der Standardbasis $E\colon\ \mathrm{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben durch ${}_E v = \begin{pmatrix} -2 \\ 32 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie:

${}_E\mathrm{id}_B = \square$ ${}_B\mathrm{id}_E = \square$ ${}_B v = \square$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **17. 12. 2022**

1 2 3 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) 0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9

Gruppe:

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Aufgabe 2 (3 Punkte) 0 1 2 3

Bestimmen Sie jeweils alle Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass

(a) $u_\alpha = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonal sind: $\alpha = \boxed{}$

(b) $|\ u_\alpha\ |^2 + \frac{7}{2}\alpha + 1 = 0$ gilt: $\alpha \in \left\{\boxed{}\right\}$

Aufgabe 3 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

(a) Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$\frac{(2+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^2} = \boxed{}$$

(b) Sei nun $z = \dfrac{4}{1-\mathrm{i}}$. Bestimmen Sie den Betrag $|z|$ sowie das Argument $\theta \in [0, 2\pi)$:

$|z| = \boxed{}$ $\theta = \boxed{}$

Aufgabe 4 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

Gegeben sei die Matrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1+3\alpha & -1-3\alpha & 1 \\ -1 & -3-3\alpha & 2+3\alpha & 9\alpha^2+1 \\ 1 & 1+3\alpha & -3-9\alpha & -3\alpha \end{pmatrix}$

(a) Sei zunächst $\alpha := 0$ sowie $b := (-2, -1, 3)^\intercal$. Bestimmen sie die Lösungmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems $A_0 x = b$:

$\mathcal{L} = \boxed{}$

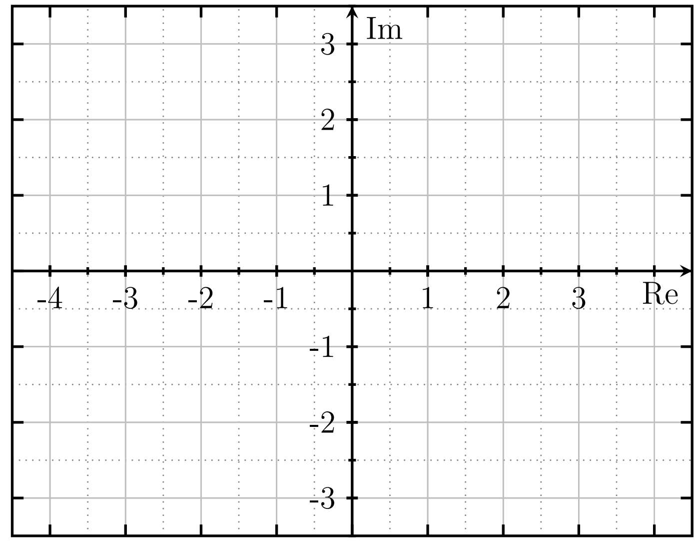
(b) Bestimmen Sie alle Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Matrix A_α Rang 3 hat. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\boxed{}\right\}$

Aufgabe 5 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

(a) Sei $w = -2 + \mathrm{i}$. Skizzieren Sie die Menge $H := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im}(z\overline{w}) \geqq 4 \right\}$.

(b) Für $z \in \mathbb{C}$ sei nun $d(z) := |z - 1 - \mathrm{i}|$ der Abstand von z zu $1 + \mathrm{i}$.

Ergänzen Sie die Skizze um die Menge $M := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, (d(z))^2 - \frac{7}{2} d(z) + 3 = 0 \right\}$:



Aufgabe 6 (3 Punkte) 0 1 2 3

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie: $A^{-1} = \boxed{}$

Aufgabe 7 (3 Punkte) 0 1 2 3

Gegeben sei die Matrix $D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie: $\det(D) = \boxed{}$

$D^2 = \boxed{}$ und $DD^\intercal = \boxed{}$.